

# MA+PHY2

## Physik-Formelsammlung



Flavio De Roni  
Studiengang Wirtschaftsingenieur | Innovation 4. Semester

HSLU-T&A  
12.05.2012

## Änderungsverzeichnis

Version	Datum	Autor	Änderung	Status
0.1	07.03.12	fdr	Einfache harmonische Schwingung	on work
0.1.1	17.03.12	fdr	Einfache harmonische Schwingung	on work
0.1.2	23.03.12	fdr	Einfache harmonische Schwingung	fertig
0.2	23.03.12	fdr	Wellen	on work
0.2.1	29.03.12	fdr	Wellen	on work
0.2.2	05.04.12	fdr	Wellen	fertig
0.3	20.04.12	fdr	Fluide	fertig
0.4	11.05.12	fdr	Wärme	fertig
1.0	12.05.12	fdr	Erste Version	fertig

## Inhalt

1	Schwingungen.....	5
1.1	Einfache harmonische Schwingung (EHS) .....	5
1.1.1	$x(t)$ , $v(t)$ und $a(t)$ der EHS .....	6
1.1.2	EHS und Kreisbewegung.....	6
1.1.3	Energie der harmonischen Schwingung.....	6
1.2	Anwendungsbeispiele .....	7
1.2.1	Vertikale Feder .....	7
1.2.2	Torsion, Koordinate $\Theta$ .....	7
1.2.3	Fadenpendel .....	7
1.2.4	Physikalisches Pendel.....	8
1.2.5	verschiedene Beispiele.....	8
1.3	Gedämpfte Schwingung.....	9
1.3.1	Lösungen, 3 Fälle .....	9
1.3.2	Mechanischer Energieverlust.....	10
1.3.3	Güte, Q-Faktor bei kleiner Dämpfung.....	10
1.4	Erzwungene Schwingung.....	10
1.4.1	Erzwungene Amplitude und Phase .....	10
1.4.2	Resonanz .....	11
1.5	Zusammenfassung.....	11
2	Wellen.....	12
2.1	Transversal- & Longitudinalwellen .....	12
2.2	Wellengeschwindigkeit .....	12
2.3	Allgemeine Wellenfunktion.....	13
2.4	Harmonische Welle .....	13
2.5	Beschreibung einer Seilwelle .....	14
2.6	Allgemeinheit der Wellengleichung.....	14
2.7	Leistung einer Welle.....	14
2.8	Intensität einer Welle.....	15
2.9	Druckwellen (Akustik) .....	15
2.10	Schallwellen.....	15
2.11	Dopplereffekt (Schall).....	16
2.12	Ideale Reflexion von Wellen .....	16
2.12.1	Reflexion und Transmission .....	16
2.13	Superpositionsprinzip.....	17
2.13.1	Interferenz .....	17
2.13.2	Schwebung.....	17
2.14	Stehende Welle.....	18
2.14.1	Resonanzen von stehenden Wellen .....	18
3	Fluide .....	19
3.1	Hydrostatik.....	19
3.1.1	Schweredruck in einem Fluid.....	19
3.1.2	Pascals Prinzip.....	19

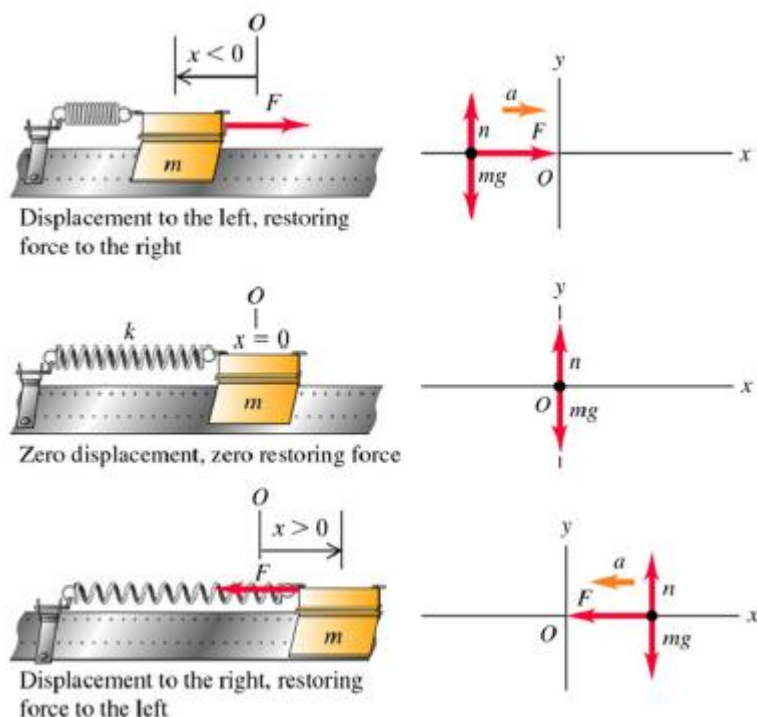
3.1.3	Auftrieb, Prinzip des Archimedes .....	20
3.1.4	Sinken, steigen, schwimmen, schweben .....	20
3.2	Hydrodynamik des idealen Fluides .....	21
3.2.1	Strömungslinien.....	21
3.2.2	Kontinuitätsgleichung.....	21
3.2.3	Newtons Gesetz auf Fluidteilchen .....	21
3.2.4	Bernoulligleichung.....	22
3.2.5	Geschwindigkeitsmessung mit Pitot-Rohr .....	23
3.2.6	Statischer, Stau- und Schweredruck .....	23
3.2.7	Venturi Effekt (Bernoulli horizontal).....	23
3.2.8	Kavitation.....	24
3.3	Laminare Strömung mit Viskosität .....	24
3.3.1	Scherspannung (Tau) und dynamische Viskosität (Eta).....	24
3.3.2	Rohrströmung und Gesetz von Hagen-Poiseuille.....	25
3.3.3	Strömungswiderstand einer Kugel, Gesetz von Stokes.....	26
3.3.4	Top Spin und Magnus Effekt.....	26
3.3.5	Laminar - turbulent.....	26
4	Wärme .....	27
4.1	Periodensystem der Elemente .....	27
4.2	Thermodynamische Grössen .....	27
4.2.1	Das Mol.....	27
4.2.2	Kelvin-Skala .....	27
4.3	Ideales Gas.....	28
4.3.1	Zustandsgleichung des idealen Gas .....	28
4.3.2	Barometrische Höhenformel, Luftdruck .....	28
4.4	Thermodynamik und Wahrscheinlichkeit.....	28
4.4.1	Reversible – Irreversible Vorgänge.....	28
4.4.2	RMS (Root Mean Square) .....	29
4.4.3	Brownsche Bewegung.....	30
4.5	Kinetische Gastheorie .....	30
4.5.1	$k_B T \sim$ Mass für mittlere kinetische Energie eines Moleküls....	30
4.5.2	Maxwell - Boltzmann Verteilung.....	31
4.5.3	Charakteristische Geschwindigkeiten.....	31
4.5.4	Freiheitsgrade und Äquipartition.....	32
4.6	Wärme und Arbeit .....	32
4.6.1	Spezifische Wärmekapazität .....	32
4.6.2	Volumenarbeit eines Gases .....	33
4.6.3	Erster Hauptsatz der Thermodynamik, Innere Energie.....	33
4.6.4	4 Zustandsänderungen des idealen Gases .....	35
4.6.5	Adiabatische Zustandsänderung.....	35

# 1 Schwingungen

Eine periodische Bewegung wird Schwingung genannt. Sie bildet die Grundlage jeder Art von Welle und Signalübertragung.

## Grundbegriffe der Schwingung

Eine Schwingung kommt immer dann zustande, wenn eine rücktreibende Kraft das System in den Gleichgewichtszustand (zurück) bringen will.



- **Auslenkung, Elongation:**  $x$  (displacement)
- **Rücktreibende Kraft:**  $F$  (restoring force)
- **Amplitude** = maximale Auslenkung:  $x_{\max}$ ,  $x$ ,  $A$
- **Periode** = Zeit für einen Zyklus:  $T$
- **Frequenz** = Anzahl Zyklen pro Zeit.  $f = 1/T$   
[f] = 1/s = Hz = Hertz
- **Kreisfrequenz:**  $\omega_0 = 2\pi f$  (angular frequency)

## 1.1 Einfache harmonische Schwingung (EHS)

Die einfache Schwingung kommt zustande, wenn die rücktreibende Kraft direkt proportional zur Auslenkung ist. Eine solche Kraft kann mit einer Feder realisiert werden:

$$F_x = -k \cdot x \text{ (Hookel)}$$

In diesem Fall ist die Schwingung **harmonisch**, d.h. eine sinus-, respektive eine cosinus-Schwingung.

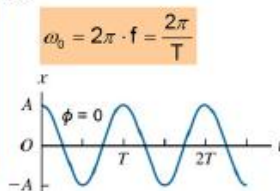
Bewegungsgleichung  $F = ma \rightarrow$  DiffGl:

$$-kx = F_x = ma = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Lösung dieser homogenen DiffGl. zweiter Ordnung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

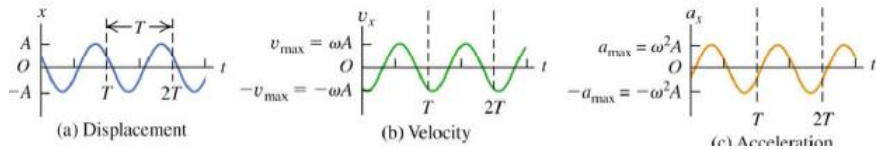


$\omega_0$  ist durch das System, respektive die Physik gegeben; nämlich durch die Federsteifigkeit  $k$  und die schwingende Masse  $m$ .

$A$  und  $\phi$  sind durch die **Anfangsbedingungen** bestimmt.

### 1.1.1 $x(t)$ , $v(t)$ und $a(t)$ der EHS

Einfache harmonische Schwingung:	$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$
$\omega_0 =$ Kreisfrequenz	$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$
$A =$ Amplitude, $\phi =$ Phasenwinkel	$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x(t)$

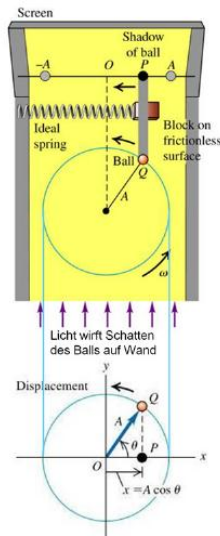


Phase und Amplitude aus den Anfangsbedingungen

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

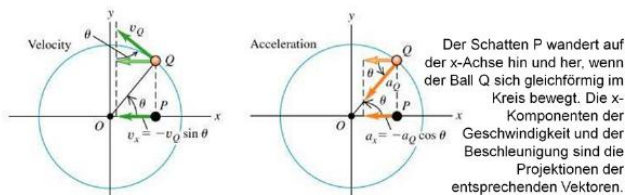
### 1.1.2 EHS und Kreisbewegung

Weil die harmonische Schwingung durch eine Cosinus-Funktion beschrieben wird, kann sie als Kreisbewegung interpretiert werden (Schattenprojektion, vergleiche Zeigerdiagramme).



Herleitung der Schwingungsgleichungen mithilfe der gleichförmigen Kreisbewegung:  $r(t) = A \cdot (\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t)) = (x(t), y(t))$

- Projektion der Position:  $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t)$
- Geschwindigkeit:  $v = dr/dt = A\omega_0 \cdot (-\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t))$   
Projektion der Geschwindigkeit:  $v_x(t) = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t)$
- Beschleunigung:  $a = v^2/r = A^2\omega_0^2[\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)]/A = A \cdot \omega_0^2$   
Projektion der Beschleunigung:  $a_x(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$   
(Alternativ könnte man auch  $a = dv/dt$  ausrechnen, dann  $a_x$ )



### 1.1.3 Energie der harmonischen Schwingung

Gesamte Energie der EHS

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \text{konstant}$$

## 1.2 Anwendungsbeispiele

### 1.2.1 Vertikale Feder

Ist die rücktreibende Kraft  $F$  direkt proportional zur Auslenkung  $x$  aus dem Gleichgewicht, tritt eine harmonische Schwingung auf. Das gilt auch für die vertikale Feder. Bei all den folgenden Anwendungen geht es jeweils darum, die äquivalente Größe zur Federkonstante  $k$  der horizontalen Schwingung zu finden.

Unbeladete Feder:  $F_{\text{Hooke}} = k \Delta l = F_G = mg$  (Gl. 1). Object in equilibrium: (spring force) = (weight of object).

Feder mit Masse im Gleichgewicht:  $x = 0$ ,  $F = k \Delta l$ .

Ausgelenkte Masse:  $F = k(\Delta l - x)$ ,  $mg$ .

Newton:  $F_{\text{Hooke}} - F_G = m \frac{d^2x}{dt^2}$   
 $k(\Delta l - x) - mg = m \frac{d^2x}{dt^2}$   
 Gl. 1:  $k \Delta l - mg - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$   
 DiffGl.:  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$  (Gl. 2)

Object displaced from equilibrium: net force is proportional to displacement, oscillations are SHM. Simple Harmonic Motion.

Die vertikale Feder schwingt harmonisch um die GG-Lage.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

### 1.2.2 Torsion, Koordinate $\theta$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$

$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$

Wire:  $- \kappa \cdot \theta = M = I \alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = I \cdot \ddot{\theta}$   
 $\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\kappa}{I} \theta = 0$   
 $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$

Balance wheel, Spring,  $\tau_z$ ,  $\theta$ .

Spring torque  $\tau_z$  opposes angular displacement.

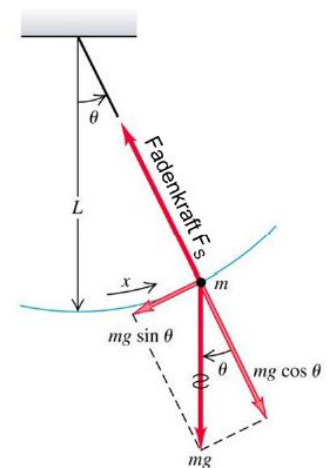
Die Unruh einer Uhr. Torque  $\tau_z = \text{Drehmoment } M$ .

### 1.2.3 Fadenpendel

Das einfache Fadenpendel stellt eine Punktmasse am Ende eines masselosen Fadens dar. Die periodische Hin- und Herbewegung ist durch das Newton'sche Gesetz auf dem Kreisabschnitt  $x$  bestimmt. Nur die Tangential-, nicht die Radialbeschleunigung ist von Interesse für die Herleitung der Periodendauer.

$$m\ddot{x} = F_x = F_{\text{tan}} = -mg \sin \theta \approx -mg \theta = -mg \frac{x}{L} \rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{L} x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

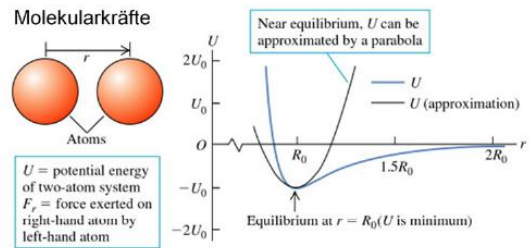
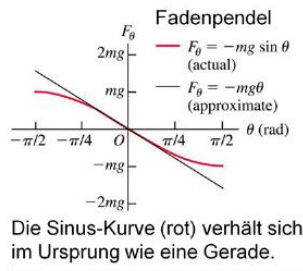


#### Lineare Näherung, korrigiertes T

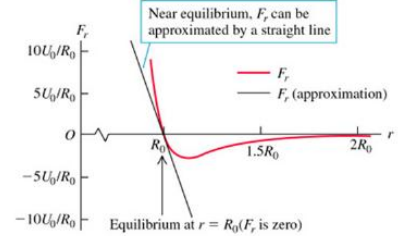
Das Fadenpendel schwingt nur annähernd harmonisch, nämlich solange wir  $\sin \theta$  durch  $\theta$  ersetzen dürfen. Wo wird diese Grenze legen, ist "Geschmacksache", respektive hängt von den Auflagen ab. Harmonisch bedeutet immer auch, die Periodendauer  $T$  hängt nicht von der Amplitude ab. Die exakte Lösung der DiffGl.  $\ddot{x} + g \sin(x/L) = 0$  ist eine Reihenfunktion und die Periodendauer ist gegeben durch:

$$T = T_{\text{harm}} \cdot f_{\text{corr}}(\theta_{\text{max}}) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right) + \left(\frac{13}{24}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right) + \left(\frac{135}{246}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right) + \dots \right]$$

### Lineare Näherung



Zwischen Molekülen wirken van der Waals Kräfte. Die Funktion  $U(r)$  zeigt die potentielle Energie  $U$  eines Moleküls im Abstand  $r$  vom Nachbarmolekül. Bei  $T = 0$  K sitzt das Molekül im tiefsten Punkt des Potentialtopfs, im Abstand  $R_0$  vom Nachbarn. Die gegenseitige Kraft ist dort null:  $F(R_0) = 0$ . Bei tiefen Temperaturen, d.h. bei kleinen thermischen Anregungen kann die potentielle Energie als Parabel, die Kraft als Gerade angenähert werden.



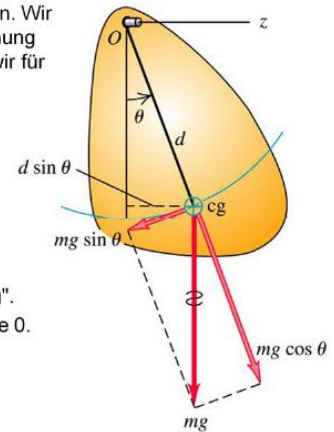
### 1.2.4 Physikalisches Pendel

Ein starrer Körper könne frei um eine vertikale Achse drehen. Wir gehen wie beim Fadenpendel vor, um die Bewegungsgleichung zu finden. Statt  $F = ma$  benutzen wir  $M = I \alpha$ .  $\sin \theta$  werden wir für kleine Auslenkungen wieder durch  $\theta$  annähern.

$$I_0 \ddot{\theta} = M_0 = -d \cdot mg \sin \theta \approx -mgd \cdot \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_0} \theta = 0$$

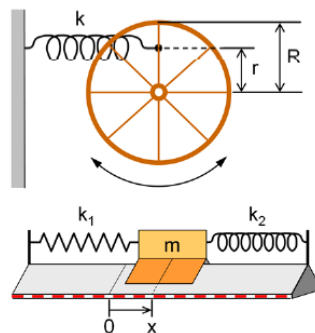
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_0}} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{I_0}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd}}$$

$d$  ist der Abstand der Drehachse  $O$  zum "center of gravity  $cg$ ".  
 $I_0$  ist das Trägheitsmoment des Körpers bzgl. der Drehachse  $O$ .  
 $m$  ist die Masse des Körpers.



### 1.2.5 verschiedene Beispiele

Leiten Sie in den folgenden Beispielen die Differentialgleichung für die harmonische Schwingung des Systems her. Benutzen Sie das Newton'sche Gesetz in der Form  $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$ , respektive  $M = I \cdot \alpha = I \cdot \ddot{\theta}$ . Wenn die rücktreibende Kraft proportional zu  $-x$  oder  $-\theta$  ist, hat die Differentialgleichung die Form  $\ddot{x} + C_{\text{Sys}} \cdot x = 0$ , respektive  $\ddot{\theta} + C_{\text{Sys}} \cdot \theta = 0$ . Die Systemkonstante  $C_{\text{Sys}} = \omega_0^2$  gibt dann die Kreisfrequenz der Schwingung. Manchmal muss  $\sin \theta$  durch  $\theta$  für kleine Auslenkungen ersetzt werden.





### 1.3 Gedämpfte Schwingung

Alle Schwingungen bisher waren ideal, reibungsfrei. Die mechanische Energie und die Amplitude blieben erhalten, respektive konstant. Reale Systeme aber sind immer Reibung unterworfen, beispielsweise bei der Aufhängung. Exemplarische wird im Folgenden die viskose Reibung untersucht. Die Reibungskraft ist dann proportional zur Geschwindigkeit für kleine v. Dieser Fall tritt zum Beispiel in Stossdämpfern auf. Das zweite Newton'sche Gesetz lautet:

$$F_{\text{Res}} = F_{\text{Rück}} + F_{\text{Dämpf}} = -kx - bv = ma \rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Hooke'sche Feder
Viskose Dämpfung #)

#) Das Stokes'sche Reibungsgesetz für eine Kugel mit Radius R lautet:  $F_{\text{Stokes}} = 6\pi\eta R v$ . In diesem Fall wäre die Konstante  $b = 6\pi\eta R$ .

#### 1.3.1 Lösungen, 3 Fälle

Der Lösungsansatz  $C \cdot e^{\psi t}$  führt zur charakteristischen Gleichung  $m\psi^2 + b\psi + k = 0$ , respektive:

$$\psi^2 + \frac{b}{m}\psi + \frac{k}{m} = 0 = \psi^2 + 2\beta\psi + \omega_0^2 \quad \text{Diese quadratische Gleichung für den Parameter } \psi \text{ hat}$$

$$\text{zwei Lösungen: } \psi_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \sqrt{\delta^2} \quad \beta = \frac{b}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ist die Linearkombination} \quad x(t) = C_1 \cdot e^{\psi_1 t} + C_2 \cdot e^{\psi_2 t}$$

der beiden Lösungen:

$$\text{Es werden 3 Fälle unterschieden, je nach Wert des Radikanden: } \delta^2 = \beta^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}$$

**1. Fall**, Radikand positiv:  $\delta^2 > 0$ , **Kriechfall**  $\beta^2 > \omega_0^2$ ;  $b^2 > 4km$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left( \frac{A}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\delta}\right) e^{\delta t} + \frac{A}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\delta}\right) e^{-\delta t} \right) = e^{-\beta t} A \left( \cosh(\delta t) + \frac{\beta}{\delta} \sinh(\delta t) \right)$$

Beispielsweise mit den Anfangsbedingungen:  
 $x(0) = A,$   
 $v(0) = 0$

**2. Fall**, Radikand null:  $\delta^2 = 0$ , **kritische Dämpfung**

$$\beta^2 = \omega_0^2; \quad b_{\text{krit}}^2 = 4km \quad \rightarrow x(t) = A(1 + \beta t)e^{-\beta t}$$

**3. Fall**, Radikand negativ, **gedämpfte Schwingung**  $\beta^2 < \omega_0^2$ ;  $b^2 < 4km$

$$\rightarrow \psi_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \text{Kreisfrequenz einer Federschwingung bei schwächer Dämpfung: #)}$$

$$= -\beta \pm i \cdot \omega_d; \quad i^2 = -1$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Gedämpfte Schwingungsgleichung §)

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$

#) Die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist kleiner als die Kreisfrequenz der freien Schwingung:  $\omega_d < \omega_0$ . Für sehr schwache Dämpfung ist der Unterschied aber gering.

§) Die Amplitude zerfällt exponentiell:  $A(t) = A \cdot e^{-\beta t}$ . Sie bildet die Umhüllende der Schwingung bei schwacher Dämpfung.

Begriffe:

1. Fall, Kriechfall, **aperiodisch**:  $\beta > \omega_0$ ,  $b > \sqrt{4km}$
2. Fall, kritische Dämpfung, **aperiodischer Grenzfall**:  $\beta = \omega_0$ ,  $b = \sqrt{4km}$
3. Fall, gedämpfte Schwingung:  $\beta < \omega_0$ ,  $b < \sqrt{4km}$

$$\beta = 1/\tau = \text{Abklingkonstante; } \tau = \text{Zeitkonstante, Zerfallszeit}$$

### 1.3.2 Mechanischer Energieverlust

Die Dämpfungskraft ( $= -bv$ ) wirkt stets gegen die Bewegungsrichtung. Sie verrichtet negative Arbeit am System und entzieht der Schwingung mechanische Energie.

Momentane Energieänderungsrate  $\rightarrow \frac{dE}{dt} = kx \frac{dx}{dt} + mv \frac{dv}{dt} = v(kx + ma) = -bv^2 = F_D \cdot v = P_D$

$\downarrow$   $v$        $\downarrow$   $a$        $\downarrow$  Diffgl:  $m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$        $\downarrow$  Leistung der Dämpfung

$E(t) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$   
 $= \frac{1}{2}k [Ae^{-\beta t} \cos(\omega_d \cdot t + \phi)]^2$   
 $+ \frac{1}{2}m \left[ -\beta \cdot Ae^{-\beta t} \cos(\omega_d \cdot t + \phi) \dots \right]^2$   
 $+ \frac{1}{2}m \left[ \dots - \omega_d \cdot Ae^{-\beta t} \sin(\omega_d \cdot t + \phi) \right]^2$   
 $= \dots$  #)

Durchschnittliche Gesamtenergie  $E(t) \approx \frac{1}{2}kA^2 \cdot e^{-2\beta t}$   
 $E(t) \approx E_0 \cdot e^{-2\beta t}$   
 $E(t=0)$

#) ...

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \theta + \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} [\beta \cos \theta + \omega_d \sin \theta]^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \theta + \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} [\beta^2 \cos^2 \theta + \omega_d^2 \sin^2 \theta + 2\beta\omega_d \cos \theta \sin \theta]$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \theta + \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} [\beta^2 \cos^2 \theta + (\omega_0^2 - \beta^2) \sin^2 \theta + 2\beta\omega_d \cos \theta \sin \theta]$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t} \cos^2 \theta + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\beta t} \sin^2 \theta + \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} [\beta^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2\beta\omega_d \cos \theta \sin \theta]$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}mA^2 e^{-2\beta t} [\beta^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2\beta\omega_d \cos \theta \sin \theta]$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\beta t} + [0, \text{gemittelt über } T]$$

### 1.3.3 Güte, Q-Faktor bei kleiner Dämpfung

Der Energieverlust pro Zyklus (pro Periodendauer T) einer gedämpften Schwingung wird mit der (Kreis-) Güte, dem Q-Faktor ausgedrückt:

$$Q = \frac{2\pi \cdot \text{Energie}}{\text{Energieverlust pro Zyklus}} = \frac{2\pi \cdot E(t)}{|\Delta E(t)_T|} = \frac{2\pi \cdot E(t)}{|dE/dt \cdot T|} = \frac{2\pi \cdot E_0 \cdot e^{-2\beta t}}{2\beta \cdot E_0 \cdot e^{-2\beta t} \cdot T} = \frac{\pi}{\beta \cdot T} = \pi \frac{\tau}{T_d} = \frac{\omega_d \cdot \tau}{2}$$

Je kleiner die Dämpfung  $\beta$ , respektive  $b$  und je grösser die Kreisfrequenz  $\omega_d \approx \omega_0$ , desto grösser die Güte.

## 1.4 Erzwungene Schwingung

### 1.4.1 Erzwungene Amplitude und Phase

$y_{\text{stat}}(t) = A(\Omega) \cdot \cos(\Omega \cdot t - \phi(\Omega))$        $\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{b\Omega}{m \cdot (\omega_0^2 - \Omega^2)}\right) = \arctan\left(\frac{2\beta \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$

$A(\Omega) = \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\Omega\right)^2}} = \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\Omega\right)^2}} \approx \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{Q \cdot \omega_0}\right)^2}}$

kleine Dämpfung:  $\omega_d \approx \omega_0$   
 Kurvendiskussion von  $A(\Omega)$  und  $\phi(\Omega)$   
 $\Omega = 0: A(\Omega = 0) = H \quad \phi(\Omega = 0) = 0$   
 $\Omega = \infty: A(\Omega = \infty) = 0 \quad \phi(\Omega = \infty) = \pi$

### 1.4.2 Resonanz

Maximale Amplitude  $\hat{=}$  Horizontale Tangente von  $A(\Omega)$ :  $\frac{dA}{d\Omega} = 0$   
 → Zwei Lösungen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ .

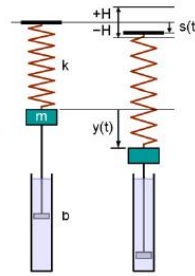
$$\Omega_1 = 0 ; \quad \Omega_2 = \text{Resonanzfrequenz} = \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

kleine Dämpfung:  $Q \gg 1$

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \approx \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}}$$

$$A(\Omega_r) = \frac{F_0}{b \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{k \cdot H}{b \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \stackrel{\omega_0^2 = \Omega_r^2 + 2\beta^2}{=} \frac{k \cdot H}{b \cdot \sqrt{\Omega_r^2 + \beta^2}} \approx \frac{F_0}{b \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{\omega_0 \cdot H}{2\beta \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \approx H \cdot Q$$

$$\phi(\Omega_r) = \phi_r = \arctan\left(\frac{2\beta \cdot \Omega_r}{\omega_0^2 - \Omega_r^2}\right) \approx \arctan\left(\frac{\omega_0 \cdot \Omega_r}{Q \cdot (\omega_0^2 - \Omega_r^2)}\right) = \arctan(\sqrt{4Q^2 - 2}) \approx \arctan(2Q) \approx \frac{\pi}{2}$$



Für grosse  $Q$  (= kleine Dämpfung) gilt:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

### 1.5 Zusammenfassung

**harmonische Schwingung**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v(t) = -\omega_0 \cdot A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = -\omega_0^2 \cdot x(t) = -\omega_0^2 \cdot A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \sqrt{\frac{mgd}{I_0}}$$

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konst.}$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} I_0 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (mgd) \theta^2$$

**gedämpfte Schwingung**

$$\ddot{s} + \frac{b}{m} \cdot \dot{s} + \omega_0^2 \cdot s = 0$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad \frac{b^*}{2I_0} \quad \beta < \omega_0$$

$$s(t) = A e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d t + \phi)$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt}(t) = \text{Kettenregel...}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$\omega_d = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)$$

$$Q = \frac{\omega_d}{2\beta} = \frac{\omega_0 \cdot \tau}{2} = \pi \frac{\tau}{T_d}$$

$$E(t)_{\text{mittlere}} = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

**erzwungene Schwingung**

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \cdot H \cos(\Omega \cdot t)$$

$$= \frac{F_0}{m} \cos(\Omega \cdot t)$$

$$y(t)_{\text{stationär}} = A(\Omega) \cdot \cos(\Omega t - \phi(\Omega))$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{b}{m} \Omega\right)^2}}$$

**Resonanz**

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2}{(4Q^2 + 1)}}$$

$$\Omega_r \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)$$

$$A(\Omega_r) = \frac{F_0}{b \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{k \cdot H}{b \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$A(\Omega_r) \approx H \cdot Q$$

Die Näherungen " $\approx$ " gelten für grosse  $Q$ , beispielsweise für  $Q > 10$  !

## 2 Wellen

- Wasserwellen
- Schall und Vibrationen
- Licht, Radiowellen, Mikrowellen, Röntgenstrahlen
- Elementarteilchen (z.B. Elektronen)
- etc.

Was ist eine Welle?

Eine Auslenkung/Störung aus der Gleichgewichtslage, die sich fortbewegt.

ODER

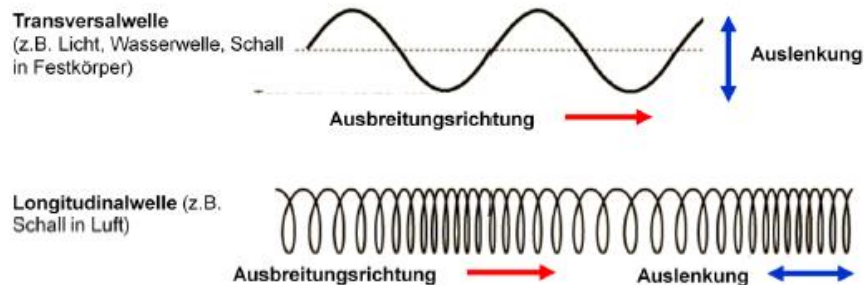
Eine räumliche und zeitliche Zustandsänderung einer physikalischen Grösse.

ODER

Eine Lösung der „Wellengleichung“.

Grundsätzlich kann eine Welle eine beliebige Form haben. Die Welle breitet sich im Raum aus. Im einfachsten Fall ändert sich die Wellenform nicht. Dämpfung, Dispersion und Nichtlinearitäten bewirken, dass die Wellenform nicht mehr konstant ist sondern sich ändert.

### 2.1 Transversal- & Longitudinalwellen

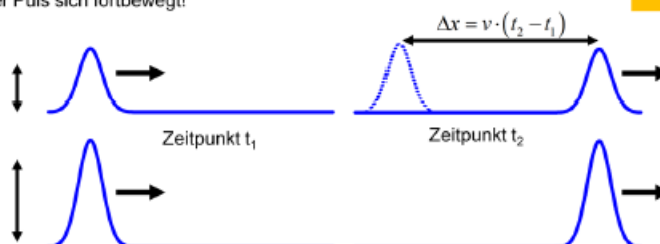


### 2.2 Wellengeschwindigkeit

Eine Welle, d.h. eine Auslenkung/Störung aus der Gleichgewichtslage, pflanzt sich mit einer charakteristischen Wellengeschwindigkeit fort. Die **Geschwindigkeit der Welle ist primär durch das Medium**, in dem sich die Welle bewegt, bestimmt und sekundär durch die Art der Störung/Anregung.

**Beispiel Seilwelle:** Die Wellengeschwindigkeit ist bestimmt durch die Seilspannung  $F_S$  und die Masse pro Länge  $\mu$ , aber unabhängig davon, ob ein starker oder schwacher Puls sich fortbewegt!

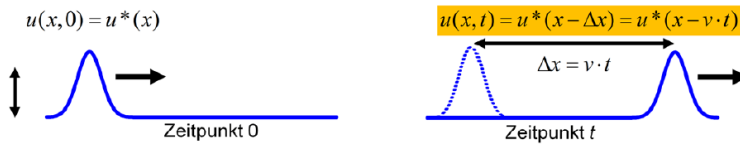
$$v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}}$$



### 2.3 Allgemeine Wellenfunktion

Eine Welle wird durch ihre Auslenkung beschrieben. Diese hängt sowohl von der Zeit, wie auch vom Ort ab, d.h.  $u = u(x,t)$

Wenn die Welle nicht gedämpft ist, ändert sich das Profil der Welle nicht, sondern es bewegt sich unverändert in Ausbreitungsrichtung. Die Welle nach einer Zeit  $t$  ist dann identisch mit der ursprünglichen Welle, einfach verschoben um die Distanz  $\Delta x = v \cdot t$

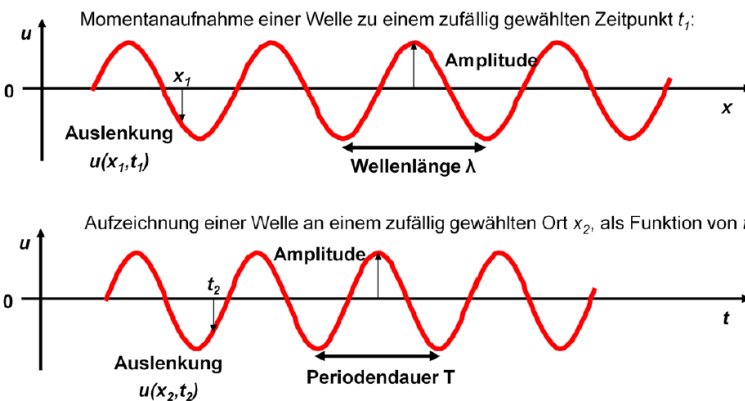


Eine Welle, die sich in die negative Richtung der x-Achse bewegt, ist beschrieben durch eine Funktion:

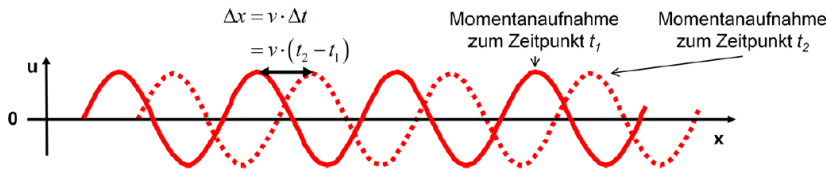
$$u(x,t) = u^*(x + v \cdot t)$$

### 2.4 Harmonische Welle

Wenn ein Seil periodisch angeregt wird, wird eine periodische Welle erzeugt. Eine **harmonische Welle** erhält man, wenn die Anregung durch eine **Sinus- oder Cosinusfunktion** beschrieben werden kann. Die resultierende Welle ist dann auch sinus- oder cosinusförmig als Funktion der Zeit **und** des Ortes. Wie bei der Schwingung kann die Auslenkung positiv oder negativ sein. Die Auslenkung einer Welle hängt von der **Position und Zeit** ab. Die maximale positive Auslenkung wird **Amplitude** genannt.



Die Welle pflanzt sich mit einer Geschwindigkeit  $v$  fort. Dabei propagiert **keine Materie** sondern **Energie!** Die Auslenkung an einem bestimmten Ort  $x$  schwingt harmonisch um die Gleichgewichtsposition mit der Frequenz  $f$ .

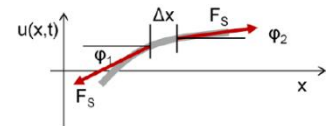


$$\lambda \cdot f = v$$

$v_{\text{Schall (Luft)}} = 344 \text{ m/s}$   
 $v_{\text{Licht (Vakuum)}} = c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

## 2.5 Beschreibung einer Seilwelle

Die Funktion  $u(x,t)$  beschreibt die Auslenkung (hier in vertikaler Richtung) eines Seils an jeder Stelle  $x$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ .



Bewegungsgleichung  $F = m \cdot a$  in vertikaler Richtung:

$$-F_s \cdot \sin \varphi_1 + F_s \cdot \sin \varphi_2 = m \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

für kleine Auslenkungen und Winkel gilt:  $\sin \varphi \approx \tan \varphi$

$$F_s (\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1) = \Delta x \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$F_s \left( \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_2 - \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_1 \right) = \Delta x \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Steigung der Kurve:  $\tan \varphi = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

$$F_s \frac{\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_2 - \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_1}{\Delta x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$F_s \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \mu \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Wellengleichung

## 2.6 Allgemeinheit der Wellengleichung

Viele Arten von Wellen können in erster Näherung durch die allgemeine Wellengleichung beschrieben werden. Hier ist  $u$  die Auslenkung einer physikalischen Größe aus ihrer Gleichgewichtsposition und  $v$  die Phasengeschwindigkeit. Die Eigenschaften des Mediums, in welchem sich die Welle fortbewegt, bestimmen die Phasengeschwindigkeit  $v$ .

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Die harmonische Welle ist eine Lösung der allgemeinen Wellengleichung:

$$u(x,t) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - v \cdot t) + \phi\right) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega \cdot t + \phi\right)$$

$u_0$  und  $\phi$  sind gegeben durch die Anfangsbedingungen.  $\omega$  ist die Kreisfrequenz:  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

Die Phasengeschwindigkeit und die Wellenlänge sind abhängig vom Medium und ändern sich, wenn die Welle vom Medium 1 ins Medium 2 wechselt. Die Frequenz ist **unabhängig** vom Medium!!!

## 2.7 Leistung einer Welle

Um die Leistung oder Intensität einer Welle zu bestimmen betrachten wir die Energie der schwingenden Teilchen in einem Volumen  $V$ .

Energie eines Teilchens:  $E = \frac{1}{2} m \omega^2 u_0^2$

Energie im Volumen  $V = A \cdot v \cdot \Delta t$ , welches in der Zeit  $\Delta t$  durchlaufen wird:

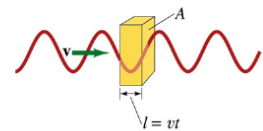
$$E_{tot} = \frac{1}{2} \rho A v \Delta t \omega^2 u_0^2$$

Durchschnittliche Leistung:

$$P = \frac{E_{tot}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho A v \omega^2 u_0^2$$

$$P \propto u_0^2$$

$$P \propto \omega^2$$



Die Leistung einer Welle ist proportional zum Quadrat der Amplitude und der Frequenz. Je nach Wellentyp (Schall, Licht), ist der Proportionalitätsfaktor anders.

Wenn sich die Welle durch ein absorbierendes Medium bewegt, gibt es Energie ans Medium ab, weshalb die Amplitude der Welle abnimmt. Die Leistung der Welle hängt dann vom Ort ab:

$$P(x) \propto u_0(x)^2 \quad u_0(x): \text{Amplitude der Welle an einer Stelle } x.$$

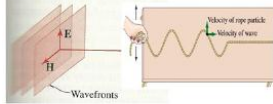
Das empfundene/detektierte Signal einer Welle (z.B. Licht oder Schall) ist proportional zur Leistung.

## 2.8 Intensität einer Welle

Die Intensität einer Welle ist definiert durch die durchschnittliche Leistung, die durch eine Einheitsfläche senkrecht zum Energiestrom transportiert wird.

$$I_0 = \frac{P}{A} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 u_0^2$$

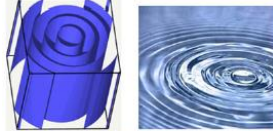
Je nach Quelle der Welle, breitet sich die Welle in eine oder mehrere Richtungen aus. Wenn man Absorption im Ausbreitungsmedium vernachlässigt, bleibt die gesamte gemittelte Leistung konstant und unabhängig von der Entfernung zur Quelle. Als Konsequenz kann sich die Intensität jedoch ändern:



**ebene Wellen oder gerichteter Strahl** (z.B. Laserstrahl):

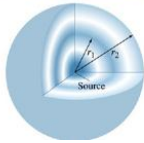
$$I(x) = \frac{P}{A} = \text{konst.}$$

A ist der Strahldurchmesser oder die Einheitsfläche bei der ebenen Welle.



**Zylinderwelle oder Kreiswelle** (z.B. zylinderförmige Lautsprecher):

$$I(r) = \frac{P}{A_{\text{Zylinderoberfläche}}} = \frac{P}{L \cdot 2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

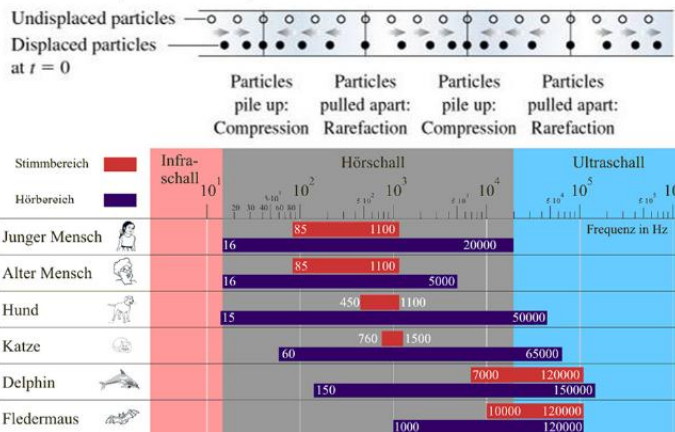


**3-dimensionale Kugelwelle** (z.B. Schall von ungerichteter Quelle):

$$I(r) = \frac{P}{A_{\text{Kugeloberfläche}}} = \frac{P}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

## 2.9 Druckwellen (Akustik)

Schallwellen sind Druckwellen und brauchen deshalb ein Medium zur Ausbreitung. Da Schallwellen longitudinale Wellen sind, sind sie nicht polarisiert.



## 2.10 Schallwellen

Die Schallgeschwindigkeit hängt stark vom Medium ab, in dem sich der Schall fortbewegt.

Festkörper:  $v_{\text{Schall, Stab}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Gas, Flüssigkeit:  $v_{\text{Schall, Fluid}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa \cdot \rho}}$

E = Elastizitätsmodul,  $\rho$  = Dichte  
 $\kappa$  = Kompressibilität

Luft (20°C)	344 m/s
Helium (20°C)	999 m/s
Wasserstoff (20°C)	1330 m/s
flüssiges Helium (4 K)	211 m/s
Wasser (0°C)	1402 m/s
Wasser (20°C)	1482 m/s
Quecksilber (20°C)	1451 m/s
Aluminium	6420 m/s
Blei	1960 m/s
Stahl	5941 m/s

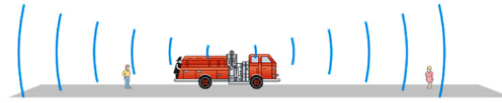
E kommt aus dem Hookschen Gesetz und entspricht der Federkonstante.

$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$   $\kappa$  beschreibt die relative Volumenänderung aufgrund einer Druckänderung

## 2.11 Dopplereffekt (Schall)

Die Schallgeschwindigkeit ist nur durch das Medium gegeben und ist unabhängig davon, was der Sender macht. Wenn er sich bewegt, verändert sich die Frequenz und die Wellenlänge für einen Zuhörer, der in Ruhe ist.

$$f = \frac{v}{\lambda}$$



Wellenfronten sind aufgelockert und folgen langsamer aufeinander



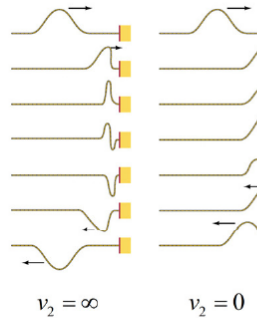
Wellenfronten sind dichter und folgen schneller aufeinander

(b) Firetruck moving

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v - v_E}{v - v_S} f$$

$v_S$ : Geschwindigkeit Sender bez. Luft  
 $v_E$ : Geschwindigkeit Empfänger bez. Luft  
 positiv, wenn Bewegung und Schall gleichgerichtet  
 negativ, wenn Bewegung und Schall entgegengesetzt

## 2.12 Ideale Reflexion von Wellen



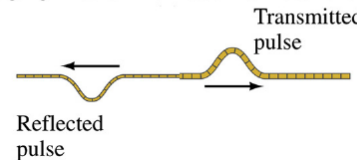
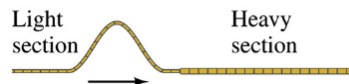
Wenn eine Welle auf ein Hindernis oder ein Medium trifft, in dem die Wellengeschwindigkeit anders ist, wird die Welle teilweise oder ganz reflektiert. Bei einer Schallwelle nennt man die Reflexion Echo. Bei der Reflexion an einem «harten» Medium ist die reflektierte Welle invertiert. Die reflektierte Welle hat dann eine Phasenverschiebung von  $\pi$  oder  $\lambda/2$  erfahren. Diese Art der Reflexion tritt auf, wenn die Wellengeschwindigkeit im 2. Medium grösser ist wie im ersten.

$$v_1 < v_2 \Rightarrow \Delta\phi = \pi$$

Wenn das Ende eines Seiles lose ist, gibt es keine Invertierung der Auslenkung und somit keine Phasenverschiebung. Allgemein ist das der Fall, wenn die Wellengeschwindigkeit im 2. Medium kleiner ist wie im ersten.

$$v_1 > v_2 \Rightarrow \Delta\phi = 0$$

Im Allgemeinen wird die einfallende Welle an einem Übergang zwischen zwei Medium teilweise reflektiert und durchgelassen (transmittiert).



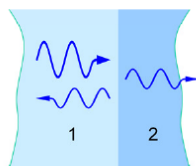
### 2.12.1 Reflexion und Transmission

Um die Amplituden und Intensitäten der reflektierten und transmittierten Welle zu berechnen, bezieht man sich auf Energieerhaltung und Stetigkeit der Amplituden beim Übergang. Für den Schall heisst das:

$$I_0 = I_{refl} + I_{trans} \quad \text{Energieerhaltung} \qquad u_0 + u_{refl} = u_{trans} \quad \text{Stetigkeit}$$

$$\frac{1}{2} \rho_1 v_1 \omega^2 u_0^2 = \frac{1}{2} \rho_1 v_1 \omega^2 u_{refl}^2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2 \omega^2 u_{trans}^2 \qquad Z_1 = \rho_1 v_1 \quad \text{Impedanz im Medium 1}$$

$$Z_1 u_0^2 = Z_1 u_{refl}^2 + Z_2 u_{trans}^2 \qquad Z_2 = \rho_2 v_2 \quad \text{Impedanz im Medium 2}$$



Reflexionskoeffizienten für Amplitude und Intensität

$$r = \frac{u_{refl}}{u_0} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad R = \frac{I_{refl}}{I_0} = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

Transmissionskoeffizienten für Amplitude und Intensität

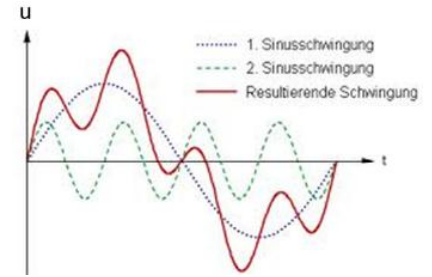
$$t = \frac{u_{trans}}{u_0} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad T = \frac{I_{trans}}{I_0} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$



## 2.13 Superpositionsprinzip

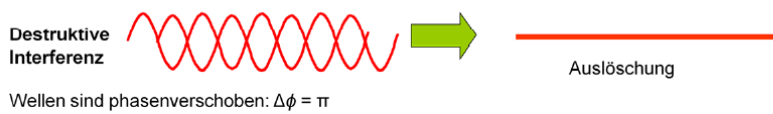
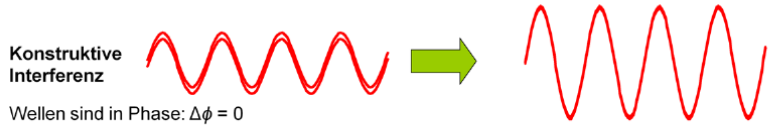
Zwei Wellen werden addiert, indem ihre Auslenkungen in jedem Punkt addiert werden.

$$u_{tot}(\vec{x}, t) = u_1(\vec{x}, t) + u_2(\vec{x}, t)$$



### 2.13.1 Interferenz

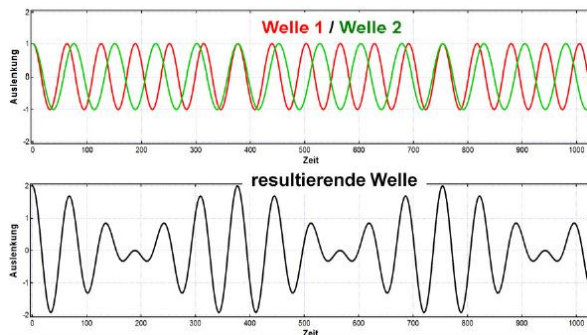
Wenn zwei oder mehrere Wellen, die gleiche Frequenz und eine zeitlich konstante Phasenbeziehung zueinander haben, treten Interferenzphänomene auf. Man unterscheidet zwei Spezialfälle der Interferenz:



### 2.13.2 Schwebung

Das Phänomen der Schwebung tritt bei der Superposition (Überlagerung) von zwei Wellen mit ähnlicher Frequenz auf. Nehmen wir an, dass wir zwei Wellen haben mit gleicher Amplitude  $u_0$ . Betrachten wir nun den zeitlichen Verlauf der Welle im Punkt  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} u_{tot}(0, t) &= u_0 \cdot \cos(\omega_1 t) + u_0 \cdot \cos(\omega_2 t) \\ &= 2u_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right) \quad \Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \quad \omega_{avg} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \\ &= 2u_0 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\omega t\right) \cdot \cos(\omega_{avg} t) \end{aligned}$$



Die resultierende Welle hat die mittlere Frequenz der zwei Ursprungswellen.

Die Intensität der Welle oszilliert mit der Schwebungsfrequenz (beat frequency):

$$\Delta f = |f_1 - f_2| = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi}$$

Das Prinzip der Schwebung wird oft zur Eichung und Kalibrierung von Frequenzen verwendet, wenn ein Standard vorhanden ist. Ein Frequenzstandard sollte gegenüber äusseren Einflüssen möglichst unempfindlich oder abgeschirmt sein. Durch die Messung der Schwebung zwischen Quelle und Standard, kann man die Frequenz der Quelle sehr genau bestimmen oder korrigieren und dem Standard anpassen.

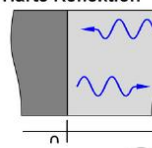
Ein typisches Beispiel ist das Stimmen eines Instrumentes mit einer Stimmgabel.



## 2.14 Stehende Welle

Wenn eine kontinuierliche Welle an einem Medienübergang reflektiert wird, interferiert die reflektierte mit der einfallenden Welle. Unter der Annahme von 100% Reflexion gilt:

### Harte Reflexion



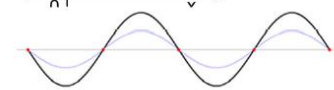
$$u_{in}(x,t) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega \cdot t\right)$$

$$u_{out}(x,t) = -u_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega \cdot t\right)$$

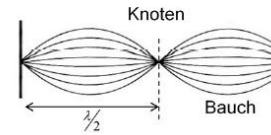
$$u_{tot}(x,t) = u_{in}(x,t) + u_{out}(x,t)$$

$$= -2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cdot \sin(\omega t)$$

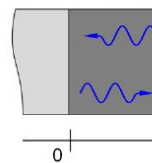
räumliche Umhüllende      zeitliche Oszillation



Stehende Welle



### Weiche Reflexion

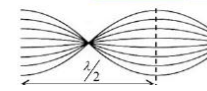


$$u_{in}(x,t) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \omega \cdot t\right)$$

$$u_{out}(x,t) = u_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega \cdot t\right)$$

$$u_{tot}(x,t) = u_{in}(x,t) + u_{out}(x,t)$$

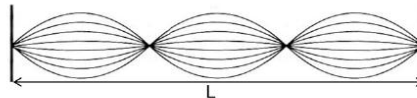
$$= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cdot \cos(\omega t)$$



### 2.14.1 Resonanzen von stehenden Wellen

Wenn die Welle sich in einem Medium fortbewegt, das durch gegenüberliegende Enden begrenzt ist, kann nur dann eine stehende Welle erzeugt werden, wenn die Knoten und Bäuche der stehenden Wellen von beiden Seiten her übereinstimmen.

z.B.



Eine solche stehende Welle kann nur in einem Bauch effizient angeregt werden.

Diese Bedingung hängt von der Distanz zwischen den zwei Enden ab und ist nur für bestimmte Frequenzen/Wellenlängen erfüllt:

Grundschiwingung/ 1. Harmonische		$f_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v}{2L}$	
1. Oberschiwingung/ 2. Harmonische		$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = 2\frac{v}{2L}$	
2. Oberschiwingung/ 3. Harmonische		$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = 3\frac{v}{2L}$	
....		$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n f_0$	

### 3 Fluide

#### 3.1 Hydrostatik

##### 3.1.1 Schweredruck in einem Fluid

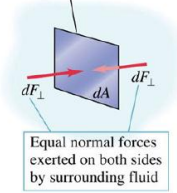
Der **Druck**  $p$  wird definiert als Normalkraft pro Fläche.

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{dF_{\perp}}{dA}$$

$$[p] = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2} = \text{Pascal} = Pa$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10^3 \text{ hPa}$$

Small area  $dA$  within fluid

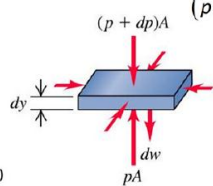
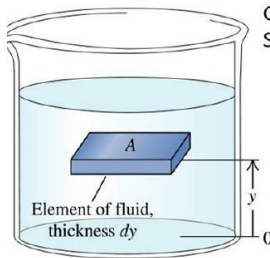


In einer Flüssigkeit wirkt der Druck allseitig. Der **Schweredruck** ist eine Konsequenz des Flüssigkeitsgewichtes. Die Flüssigkeitsscheibe ist im

Gleichgewicht. Die Kraft von oben plus das Eigengewicht der Scheibe sind gleich gross wie die Kraft von unten:

$$(p + dp)A + \rho g(A \cdot dy) = p \cdot A \rightarrow dp = -\rho g \cdot dy$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass der Druck  $p$  zunimmt, wenn die Höhe  $y$  über dem Boden abnimmt.

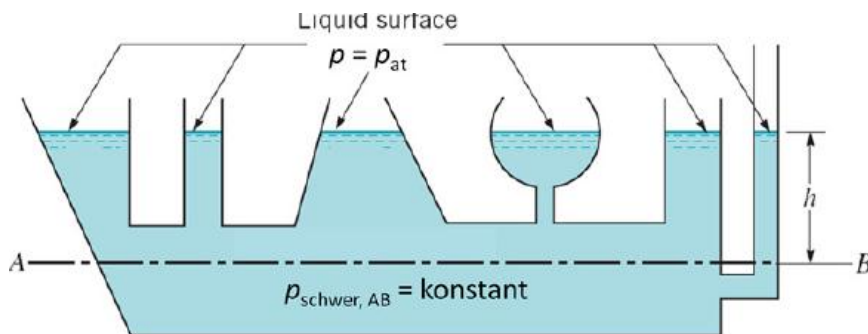


$$p_{\text{schwer}} = \rho g h$$

Flüssigkeitsdichte  
Tiefe unter Oberfläche

#### Hydrostatisches Paradoxon

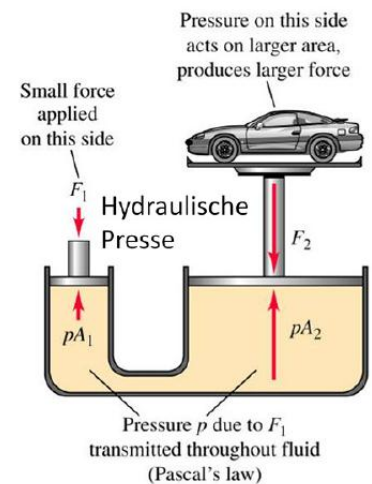
Der Schweredruck ist nur eine Funktion der Tiefe unterhalb der Oberfläche, nicht der Gefäßform.



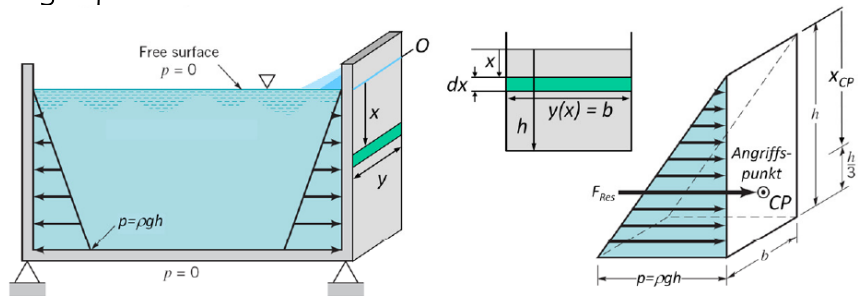
##### 3.1.2 Pascals Prinzip

Der Druck in einer Flüssigkeit wirkt allseitig. Mit unterschiedlich grossen Flächen kann man eine kleine Kraft in eine grosse verwandeln.

$$\frac{F_1}{A_1} = p_1 = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$



### Angriffspunkt und Kraft auf Seitenwand



Der Schweredruck nimmt linear mit der Tiefe zu. Die gesamte Kraft und deren Angriffspunkt CP auf die Seitenfläche eines Behälters kann durch Integrieren berechnet werden.

Resultierende Kraft auf Wand:  $F_{Res} = \int_0^h dF = \int_0^h p(x) \cdot dA = \int_0^h \rho g x \cdot y(x) dx = \int_0^h \rho g x \cdot b dx$

Drehmoment:  $x_{CP} \cdot F_{Res} = M_O = \int_0^h dM = \int_0^h x \cdot dF = \int_0^h x \cdot p(x) dA = \int_0^h x \cdot \rho g x \cdot y(x) dx$

### 3.1.3 Auftrieb, Prinzip des Archimedes

Die **Auftriebskraft**  $F_A$  ist eine direkte Konsequenz der hydrostatischen Druckzunahme mit der Tiefe.

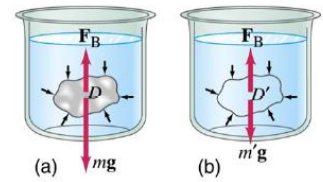
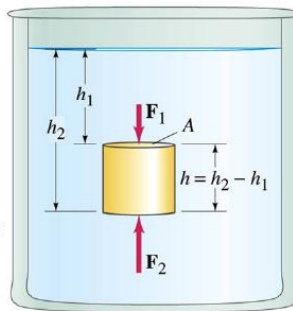
$$F_A = \rho_{FL} g V_K$$

Dichte der Flüssigkeit  
Eingetauchtes Volumen des Körpers

Herleitung 1:

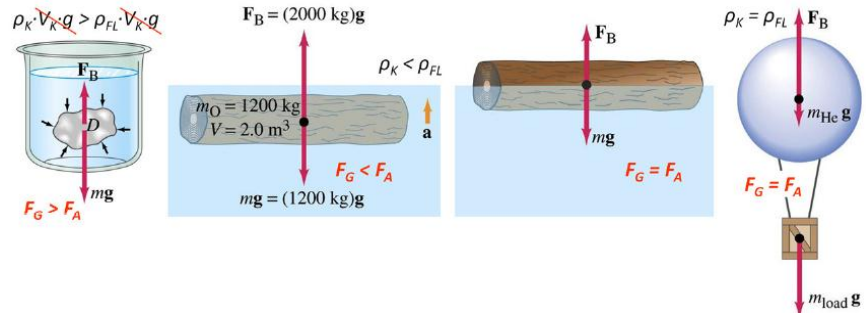
Auf den eingetauchten Zylinder wirkt eine grössere hydrostatische Kraft von unten als von oben. Die resultierende Kraft ist die Auftriebskraft  $F_A$ :

$$F_A = F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A = \rho_{FL} g (h_2 - h_1) A = \rho_{FL} g \cdot h A = \rho_{FL} g \cdot V_K$$



Herleitung 2: Auf den Stein wirkt vom umgebenden Wasser die gleiche Kraft  $F_B$  wie auf das an seine Stelle gesetzte Wasser. Das Wasser ist im Gleichgewicht. Seine Gewichtskraft ist also gleich seiner Auftriebskraft, folglich gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

### 3.1.4 Sinken, steigen, schwimmen, schweben

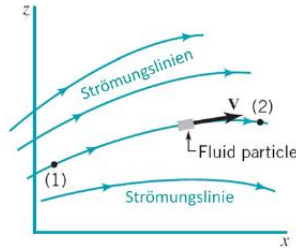
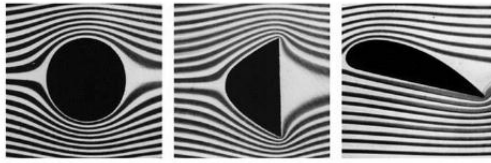


Beim Ballon setzt sich die Gewichtskraft zusammen aus Ballonhülle, Heliumgas, Korb und Seilen. Ebenso ist das gesamte Volumen (Ballon, Korb und Seile) für die Auftriebskraft zu berücksichtigen. Das Fluid ist beim Ballon die Umgebungsluft.

### 3.2 Hydrodynamik des idealen Fluides

#### 3.2.1 Strömungslinien

In der Fluidodynamik unterscheidet man zwischen **laminarer** und **turbulenter**,<sup>#)</sup> zwischen **stationärer** und **transienter**<sup>§)</sup> Strömung. Die Abbildung rechts zeigt laminare Strömung um Objekte unterschiedlicher Gestalt. Die **Strömungslinien** sind Tangentiallinien an das Geschwindigkeitsfeld der Fluidteilchen.<sup>¶)</sup>



#### 3.2.2 Kontinuitätsgleichung

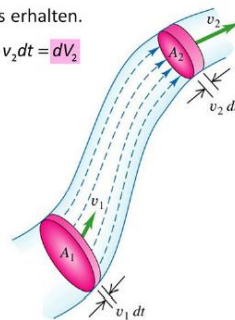
Bei einem **inkompressiblen** Fluid bleibt das Volumen unterwegs erhalten.

$$dV_1 = A_1 \cdot v_1 dt = A_2 \cdot v_2 dt = dV_2$$

→ Kontinuitätsgleichung für **inkompressible** Fluide

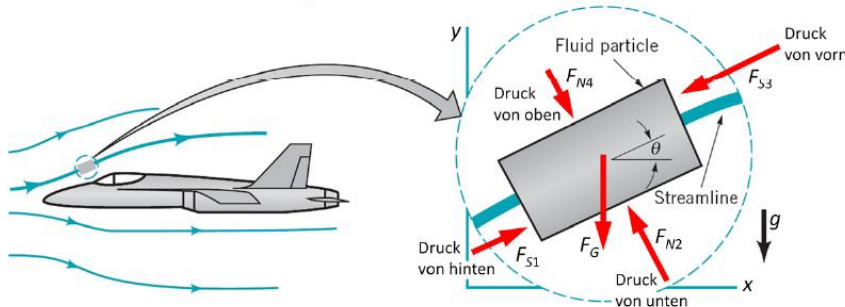
Volumenstrom entlang eines Rohres:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \frac{d(\text{Vol})}{dt} = I_{\text{vol}}$$



#### 3.2.3 Newtons Gesetz auf Fluidteilchen

Auch ein Fluidteilchen unterliegt dem Newtonschen Gesetz  $F = m \cdot a$ , wie alle Materie. Wir studieren im Folgenden inkompressible und laminare Strömung ohne innere Reibung, d.h. ohne **Viskosität**<sup>#)</sup>. Auf ein Flüssigkeitsteilchen wirken dann nur Druckkräfte vom umliegenden Fluid und die Gewichtskraft. Man unterscheidet zwischen Druckkräften  $F_S$  entlang der Strömungslinie und  $F_N$  normal (senkrecht) zur Strömungslinie.



Bew.Gl. entlang Strömungslinie  $-\rho g \sin(\theta) - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho a_s = \rho v \frac{\partial v}{\partial s}$  ... normal zur Strömungslinie  $-\rho g \cos(\theta) - \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{v^2}{R}$

#) Viskosität kann als Zähigkeit übersetzt werden. Honig ist zäh, Wasser ist wenig zäh und Luft ist fast gar nicht zäh (= "dünnflüssig").

Ein Teilchen in einer Flüssigkeit wird durch seine Dichte  $\rho$  statt durch seine Masse  $m$  charakterisiert. Die partiellen Ableitungen in den Bewegungsgleichungen sind entlang oder normal (senkrecht) zur Strömungslinie. Die Minuszeichen hängen mit der Vorzeichenkonvention zusammen.

Ein inkompressibles Fluid ohne Viskosität heißt **ideales Fluid** !

### 3.2.4 Bernoulligleichung

Da wir reibungsfreie und stationäre Strömung betrachten, kann man eine einfache Arbeit-Energiebilanz zwischen zwei Orten auf der gleichen Strömungslinie aufstellen. Der Fluidschlauch (a,c) wird nach (b,d) verschoben. Das ist äquivalent zur Verschiebung des kleinen Zylinders (a,b) nach (c,d), ohne zusätzliche Änderung.

▪ Verrichtete Arbeit:

$$dW = dW_1 - dW_2 = F_1 \cdot ds_1 - F_2 \cdot ds_2 = p_1 A_1 ds_1 - p_2 A_2 ds_2 = (p_1 - p_2) d\psi$$

▪ Änderung der kinetischen Energie:

$$dE_{kin} = dE_{kin,2} - dE_{kin,1} = \frac{1}{2} \rho \cdot d\psi (v_2^2 - v_1^2)$$

▪ Änderung der potentiellen Energie:

$$dU_{Höhe} = \rho d\psi g (y_2 - y_1)$$

▪ Bilanz:  $dW = dE_{kin} + dU_{Höhe}$

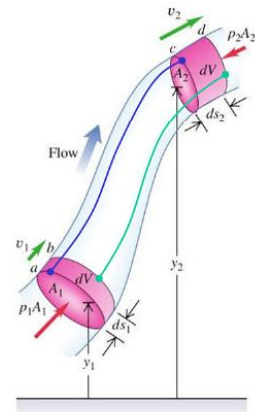
$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1)$$

**Bernoulligleichung entlang einer Strömungslinie**

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \text{konstant} = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Inkompressible, stationäre Strömung ohne innere Reibung (ohne Viskosität) !

Daniel Bernoulli



Die Bernoulligleichung ist die am meisten, oft auch fälschlich verwendete Gleichung der Fluidodynamik. Überlegen Sie deshalb immer, ob die Bernoulligleichung wirklich anwendbar ist. Identifizieren Sie auch sauber die Punkte (1) und (2) auf der Strömungslinie.

Daniel Bernoulli (1700 – 1782) entstammte einer Basler gelehrtenfamilie und war einer der bedeutendsten Mathematiker/Physiker seiner Zeit. Von 1725 bis 1733 forschte er an der "Russischen Akademie der Wissenschaften" in Sankt Petersburg. Bernoulli lieferte auch bahnbrechende Beiträge auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

**Senkrecht (normal) zur Strömungslinie** kann man, ausgehend von der Gleichung auf der vorangehenden Seite, folgende Beziehung finden:

$$\rho + \rho \int \frac{v^2}{R} \cdot dn + \rho g y = \text{konstant, wenn senkrecht zur Strömungslinie und vertikal in y-Richtung}$$

(Es handelt sich hier nicht um die Bernoulligleichung !)

Ist die Strömungslinie nicht gekrümmt ( $R = \infty$ ), dann ist die Druckabnahme senkrecht zur Strömungslinie und vertikal in y-Richtung gleich der **Abnahme** des Schweredruckes:

$$\Delta p = -\rho g \cdot \Delta y = \rho g \cdot \Delta h \quad (\Delta y = \text{Höhe} ; \Delta h = \text{Tiefe})$$

Senkrecht zur geraden Strömungslinie wirkt nur der Schweredruck, wie in der Hydrostatik !

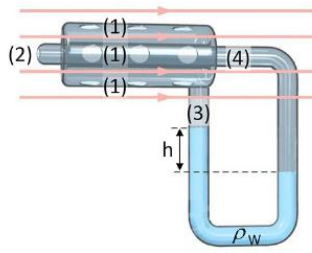
### 3.2.5 Geschwindigkeitsmessung mit Pitot-Rohr

Der Höhenunterschied sei vernachlässigbar. Dann ist:

$$p_1 = p_3 = p_0$$

$$p_2 = p_4 = p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_0)^2$$

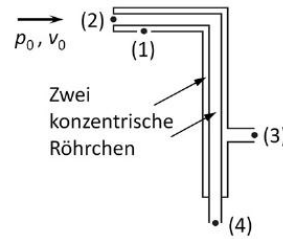
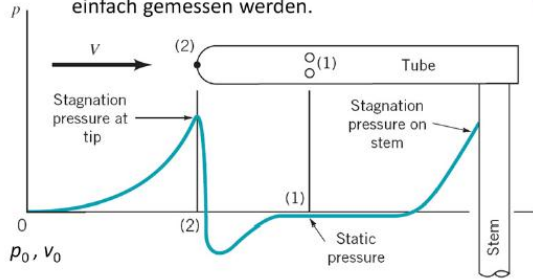
Die Druckdifferenz  $p_4 - p_3$  ist eine Mass für die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  und kann einfach gemessen werden.



$$p_4 - p_3 = \rho_w gh =$$

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_0)^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(\rho_w gh)}{\rho}}$$



### 3.2.6 Statischer, Stau- und Schweredruck

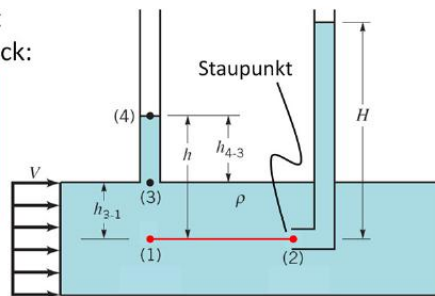
Jeder Term der Bernoulligleichung ist mess- und interpretierbar als ein Druck:

statischer Druck = Druck, den ein mitschwimmender Sensor anzeigt

Dynamischer Druck = zusätzlicher Druck, der auf einen frontal stehenden Sensor wirkt

$$p + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst.}$$

Höhen- oder Schweredruck  
 Achtung, weil  $y$  mit der Höhe zunimmt, nimmt der Druck  $p$  mit der Höhe ab! #)



(1)-(3)-(4) ist eine Linie senkrecht zur horizontalen Strömung (S 16). Bernoulli gilt zwischen (1) und (2).

$$S \perp \rightarrow p_1 = \rho gh + p_{st} \quad p_2 = \rho gH + p_{st}$$

$$S \parallel \rightarrow p_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad v_2=0$$

$$\rightarrow \text{Rohrströmung: } v = v_1 = \sqrt{2g(H-h)}$$

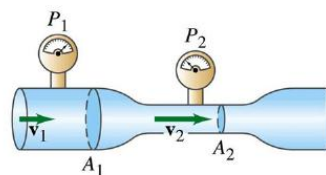
### 3.2.7 Venturi Effekt (Bernoulli horizontal)

Bei geringem Höhenunterschied, d.h. praktisch konstantem Schweredruck kann der  $y$ -Term in der Bernoulligleichung gestrichen werden.

Venturigleichung entlang einer Strömungslinie

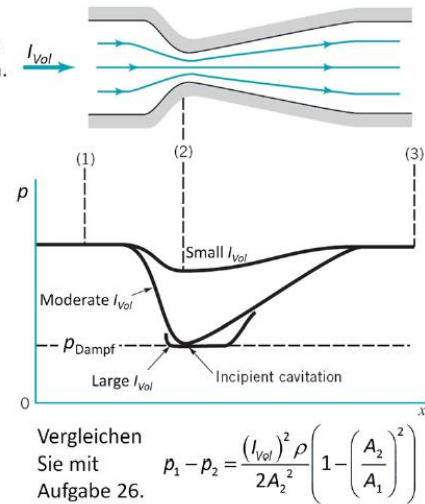
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \text{konstant} = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Inkompressible, stationäre Strömung ohne Viskosität



### 3.2.8 Kavitation

Der Druckabfall bei grosser Strömungsgeschwindigkeit kann beträchtlich sein, der Druck gar unter den Dampfdruck der Flüssigkeit fallen. In diesem Fall beginnt die Flüssigkeit zu siedend und es bilden sich Dampfblasen. Diesen Effekt nennt man **Kavitation**. Er kann gefährlich sein und grossen Schaden anrichten.



## 3.3 Laminare Strömung mit Viskosität

### 3.3.1 Scherspannung (Tau) und dynamische Viskosität (Eta)

Bisher sind wir von idealen Strömungen ohne **innere Reibung** (Zähigkeit, Viskosität) ausgegangen. Wir konnten das Prinzip der Erhaltung der mechanischen Energie anwenden, um die Bernoulli-Gleichung herzuleiten. Reale Fluide aber zeigen Viskosität. Die Fluidschichten "kleben" aneinander und an der Behälterwand (z.B. Rohr). Turbulenz und Wirbel können nur mit Viskosität entstehen.

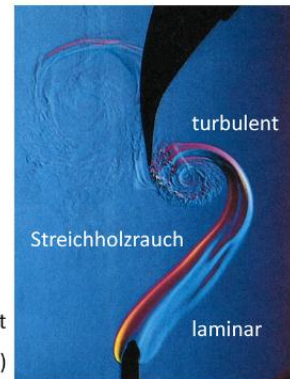
Zwischen zwei Platten gleicher Fläche  $A$  ist eine zähe Flüssigkeit. Die obere Platte wird gegen die untere mit der Geschwindigkeit  $v$  verschoben. Dazu ist eine Kraft  $F$  nötig. Die Kraft  $F$  ist umso grösser, je grösser die Fläche  $A$  und je grösser die Geschwindigkeit  $v$  und je kleiner der Abstand  $z$  ist:

$$F \sim \frac{A \cdot v}{z}$$

Scherspannung  $\tau$

$$\frac{F}{A} = \tau = \eta \frac{dv}{dz}$$

"Eta":  $\eta$  = dynamische Viskosität  
 $[\eta] = (\text{N}/\text{m}^2) \cdot \text{s} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \text{kg}/(\text{s} \cdot \text{m})$   
 $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ poise}$



Scherung, Scherspannung ("Shear stress"): Die Kraft  $F$  ist parallel zur Ebene  $A$ .

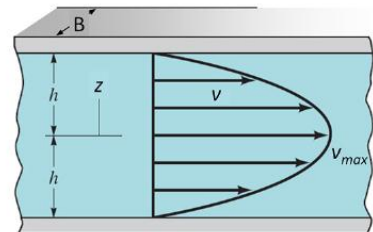
Zugspannung ("Tensile stress") und Druck ("pressure"): Die Kraft  $F$  steht senkrecht auf der Ebene  $A$ .

### Strömungsprofil zwischen Platten

Das Geschwindigkeitsprofil  $v(z)$  einer Flüssigkeit zwischen zwei grossen und nahen, parallelen Platten ist in der Figur gezeigt und kann mit folgender Gleichung beschrieben werden: #)

$$v(z) = v_{\max} \left( 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right) = \frac{3}{2} v_{av} \cdot \left( 1 - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right)$$

Die Flüssigkeit "klebt" an den Platten:  $v(z = \pm h) = 0$ ; und hat die grösste Geschwindigkeit im Zentrum:  $v(z = 0) = v_{\max} = \frac{3}{2} \cdot v_{av}$ .

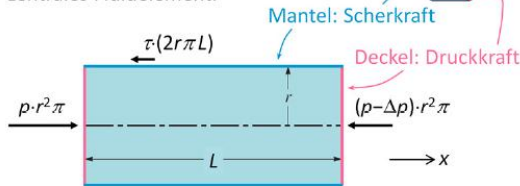


Ein perfektes Parabelprofil  $v(z)$  bildet sich nur aus, wenn  $h$  nicht zu gross ist.



### Strömungsprofil in einem Rohr

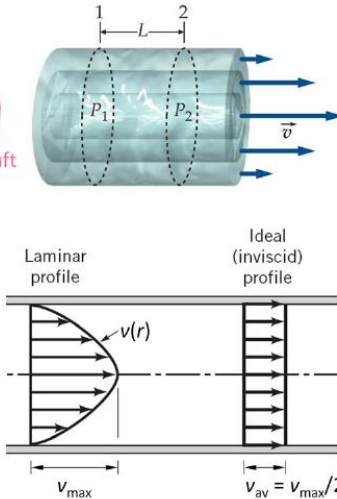
Wir betrachten eine laminare, stationäre Strömung in einem kreisrunden Rohr (Radius  $R$ ). Es herrscht dann Kräftegleichgewicht auf ein zylindrisches, zentrales Fluidelement.



$$p \cdot r^2 \pi = F_p = F_{p-\Delta p} + F_{Mantel} = (p - \Delta p) r^2 \pi + \tau \cdot (2r \pi \cdot L)$$

$$\rightarrow \frac{\Delta p}{2L} r = \tau = \eta \frac{dv}{dr} \rightarrow dv = \frac{\Delta p}{2L \eta} r \cdot dr$$

$$v(r) = \frac{\Delta p \cdot R^2}{4L \eta} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) = v_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$



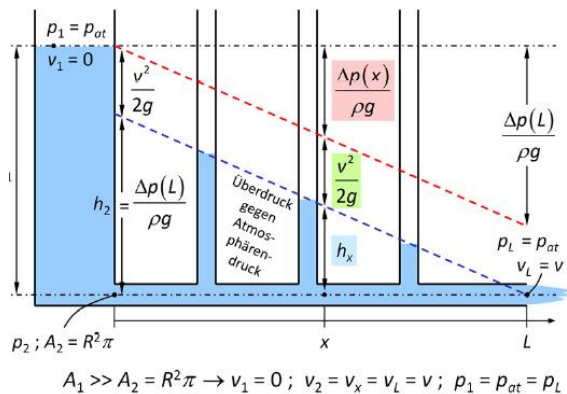
### 3.3.2 Rohrströmung und Gesetz von Hagen-Poiseuille

**Gesetz von Hagen-Poiseuille :**  
Laminare, stationäre Strömung mit Viskosität  $\eta$  durch ein Rohr der Länge  $L$  und Radius  $R$  #)

$$I_{Vol} = \pi R^2 \frac{v_{\max}}{2} = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{\Delta p}{L}$$

### Rohrauslauf mit viskosem Verlust

$$p_{at} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_x + \Delta p(x) + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_{at} + \Delta p(L) + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Bernoulligleichung mit} \\ \text{Druckverlust } \Delta p(x) \text{ durch} \\ \text{Viskosität entlang Rohr: \#)} \end{array} \right.$$



$$\Delta p(x) = \frac{8 \eta x}{\pi R^4} \cdot I_{Vol} = \frac{8 \eta x}{\pi R^4} \cdot \pi R^2 v_{av}$$

$$\Delta p(L) = \frac{8 \eta L}{\pi R^4} \cdot I_{Vol} = \frac{8 \eta L}{R^2} \cdot v_{av} \quad \in$$

Aus ① = ④ mit ⑤ folgt eine quadratische Gleichung für die Ausflussgeschwindigkeit: !

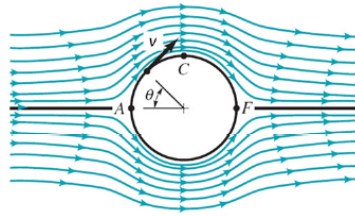
$$\rightarrow \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{8 \eta L}{R^2} \cdot v - \rho g h_1 = 0$$

$$v = -\frac{8 \eta L}{\rho R^2} \pm \sqrt{\left( \frac{8 \eta L}{\rho R^2} \right)^2 + 2 g h_1}$$

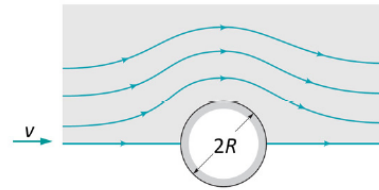
$$A_1 \gg A_2 = R^2 \pi \rightarrow v_1 = 0; v_2 = v_x = v_L = v; p_1 = p_{at} = p_L$$

### 3.3.3 Strömungswiderstand einer Kugel, Gesetz von Stokes

Eine Kugel in einer idealen, reibungsfreien Strömung erfährt keinen Strömungswiderstand.



Für kleine Geschwindigkeiten <sup>4)</sup> ist die Strömung um die Kugel laminar und der Strömungswiderstand der Kugel ist proportional zur Strömungsgeschwindigkeit  $v$ .

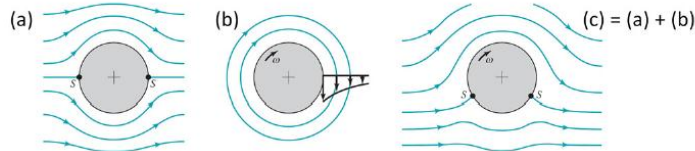
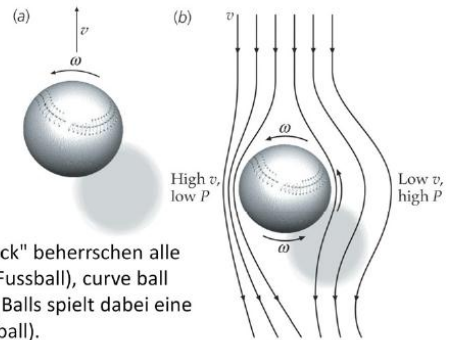


Reibungskraft nach Stokes  $F_{Stokes} = 6\pi\eta Rv$

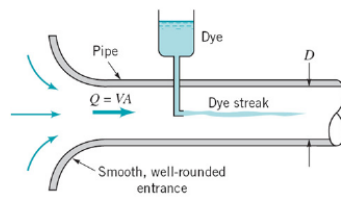
$v$  = Anström- resp. Relativgeschwindigkeit  
 $R$  = Kugelradius,  $\eta$  = dynamische Viskosität

### 3.3.4 Top Spin und Magnus Effekt

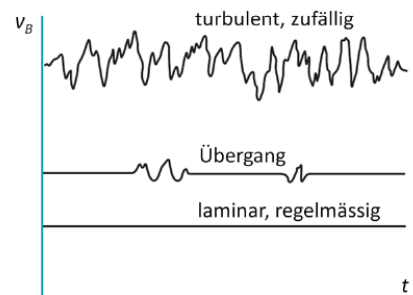
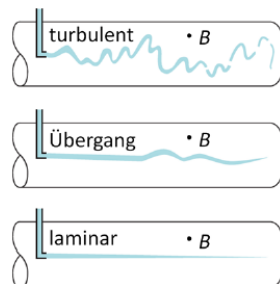
Ein Baseball wird mit der Geschwindigkeit  $v$  geworfen. Dem Ball wird beim Abwurf noch eine Rotation (Drall, Effet)  $\omega$  mitgegeben. Die Luftschicht nahe zum Ball dreht mit diesem. Die Luftbewegung um den Ball setzt sich aus einer linearen Strömung und einer Rotationsströmung zusammen. Somit strömt die Luft auf einer Seite des Balls schneller als auf der anderen Seite. Mit dem Venturi Effekt folgt daraus ein seitwärts Driften <sup>4)</sup>. Diesen "Trick" beherrschen alle guten Ballspieler: Top Spin (Tennis), Effet Ball (Fussball), curve ball (Baseball). Die Oberflächenbeschaffenheit des Balls spielt dabei eine entscheidende Rolle (z.B. "Dimples" beim Golfball).



### 3.3.5 Laminar - turbulent




Viskose Strömung kann laminar oder turbulent sein. Links ist eine Tintenspur für verschiedene Strömungstypen gezeigt. Unten ist die Strömungsgeschwindigkeit  $v_B$  an einem Ort  $B$  im Rohr als Funktion der Zeit gezeigt. Für laminare, stationäre Strömung ist  $v_B$  konstant. Jede Strömung wird bei grosser Geschwindigkeit turbulent.



## 4 Wärme

### 4.1 Periodensystem der Elemente



Ordnungszahl, Masse (u), Symbol, Vorkommen

x fest, x flüssig, x gasförmig  
 o natürlich, nat. radioaktiv, synthetisch

Serie: Alkalimetall, Erdalkalimetall, Lanthanoid, Actinoid, Übergangsmetall, Halbmetall, Metalloid, Nichtmetall, Halogen, Edelgas

1	2	13	14	15	16	17	18												
1 H 1.0079		5 B 10.811	6 C 12.011	7 N 14.007	8 O 15.999	9 F 18.998	10 Ne 20.18												
3 Li 6.941	4 Be 9.0122	13 Al 26.982	14 Si 28.086	15 P 30.974	16 S 32.065	17 Cl 35.453	18 Ar 39.948												
11 Na 22.99	12 Mg 24.305	19 K 39.098	20 Ca 40.078	21 Sc 44.956	22 Ti 47.867	23 V 50.942	24 Cr 51.996	25 Mn 54.938	26 Fe 55.845	27 Co 58.933	28 Ni 58.693	29 Cu 63.546	30 Zn 65.38	31 Ga 69.723	32 Ge 72.64	33 As 74.922	34 Se 78.96	35 Br 79.904	36 Kr 83.798
37 Rb 85.468	38 Sr 87.62	39 Y 88.906	40 Zr 91.224	41 Nb 92.906	42 Mo 95.96	43 Tc [97.90]	44 Ru 101.07	45 Rh 102.91	46 Pd 106.42	47 Ag 107.87	48 Cd 112.41	49 In 114.82	50 Sn 118.71	51 Sb 121.76	52 Te 127.6	53 I 126.9	54 Xe 131.29		
55 Cs 132.91	56 Ba 137.33	57 La 138.91	58 Ce 140.12	59 Pr 140.91	60 Nd 144.24	61 Pm [144.9]	62 Sm 150.36	63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.93	66 Dy 162.5	67 Ho 164.93	68 Er 167.26	69 Tm 168.93	70 Yb 173.05	71 Lu 174.97			
87 Fr [223.0]	88 Ra [226.0]	89 Ac [227.0]	90 Th 232.04	91 Pa 231.04	92 U 238.03	93 Np [237.0]	94 Pu [244.0]	95 Am [243.0]	96 Cm [247.0]	97 Bk [247.0]	98 Cf [251.0]	99 Es [252.0]	100 Fm [257.0]	101 Md [258.0]	102 No [259.1]	103 Lr [262.1]			

Innere Übergangsmetalle (Lanthanoide und Actinoide)

57 La 138.91	58 Ce 140.12	59 Pr 140.91	60 Nd 144.24	61 Pm [144.9]	62 Sm 150.36	63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.93	66 Dy 162.5	67 Ho 164.93	68 Er 167.26	69 Tm 168.93	70 Yb 173.05	71 Lu 174.97
89 Ac [227.0]	90 Th 232.04	91 Pa 231.04	92 U 238.03	93 Np [237.0]	94 Pu [244.0]	95 Am [243.0]	96 Cm [247.0]	97 Bk [247.0]	98 Cf [251.0]	99 Es [252.0]	100 Fm [257.0]	101 Md [258.0]	102 No [259.1]	103 Lr [262.1]

(c) Copyright 2008 Periodensystem.info - Alle Rechte vorbehalten. Vervielfältigung nur mit Genehmigung.

### 4.2 Thermodynamische Größen

#### 4.2.1 Das Mol

Die Einheit mol ist eine Mengenangabe.

1 mol entspricht der Avogadrozahl  $N_A = 6.0221 \times 10^{23}$  Teilchen

Die gesamte Anzahl Teilchen in einem Körper / Stoff ist  $N_{tot}$ . Die Anzahl mol des Körpers ist

$$n = \frac{N_{tot}}{N_A}$$

14	o
Si	
Molare Masse $M$	28.086 $\frac{g}{mol}$

Die Masse  $m_{tot}$  eines Körpers / Stoffes von  $n$  mol ist  $m_{tot} = n \cdot M$

#### 4.2.2 Kelvin-Skala

Definition der Kelvin-Skala:  $T_K = T_{°C} + 273.15$

### 4.3 Ideales Gas

#### 4.3.1 Zustandsgleichung des idealen Gas

Experimentell findet man für ein (stabiles) Gas bei "genügend" kleiner Gasdichte und "nicht zu tiefer" Temperatur folgende Gleichung:

Ideale Gasgleichung 
$$pV = nRT = \frac{N_{tot}}{N_A} RT = \frac{m_{tot}}{M} RT$$

$p$  = Gasdruck [Pa] ;  $V$  = Gasvolumen [m<sup>3</sup>]

$T$  = Gastemperatur **in Kelvin (!)** ;  $n$  = Anzahl mol im Gas

$N_{tot}$  = Anzahl Moleküle im Gas ;  $N_A \equiv 6.022 \times 10^{23}$  Teilchen / mol

$m_{tot}$  = Gasmasse ;  $M$  = Molmasse ([www.periodensystem.info](http://www.periodensystem.info))

$R$  ist die **Universelle Gaskonstante**. Universell deshalb, weil sie für alle idealen Gase gleich ist:  $R = 8.314472(15) \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$  <sup>#)</sup>

#### 4.3.2 Barometrische Höhenformel, Luftdruck

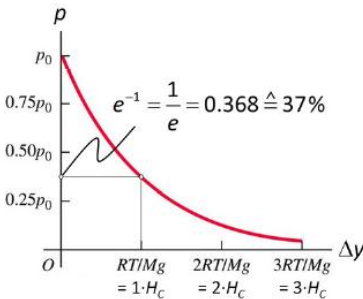
Der Schweredruck in einem Fluid ist  $dp = -\rho g dy$ . Das Minuszeichen bedeutet, dass der Druck abnimmt mit zunehmender Höhe. Die differentielle Gleichung ist lokal, d.h. sie gilt auf jeder Höhe mit unterschiedlicher Dichte.

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g = -\frac{m_{tot}}{V} g = -\frac{Mg}{RT} p \rightarrow \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{y_1}^{y_2} dy \rightarrow \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\frac{Mg}{RT} (y_2 - y_1) \rightarrow p_2 = p_1 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} \Delta y}$$

Barometrische Höhenformel bei konstanter  $T$  :

$$p(\Delta y) = p_0 \cdot e^{-\frac{Mg}{RT} \Delta y} = p_0 \cdot e^{-\frac{\Delta y}{H_c}}$$

$H_c$  ist die charakteristische Höhe <sup>#)</sup>

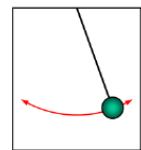


<sup>#)</sup> Die charakteristische Höhe  $H_c$  spielt die gleiche Rolle wie die Zeitkonstante  $\tau$  (Tau) beim Entladen eines Kondensators oder beim Fallen einer Kugel in einem viskosen Fluid. Der Ausdruck  $p(\Delta y) = p_0 e^{-\Delta y / H_c}$  ist nämlich identisch mit der Gleichung  $U(t) = U_0 e^{-t/\tau}$ , respektive  $a(t) = a_0 e^{-t/\tau}$ .

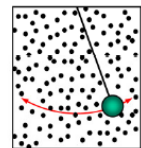
### 4.4 Thermodynamik und Wahrscheinlichkeit

#### 4.4.1 Reversible – Irreversible Vorgänge

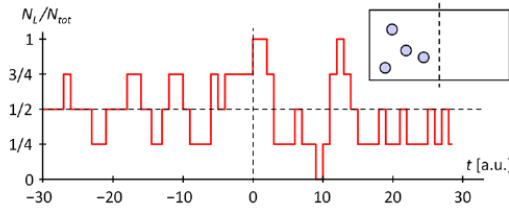
Reversible Vorgänge sind solche, welche bei Zeitumkehr immer noch möglich sind. Beispiel eines reversiblen Vorganges ist ein reibungsfreies Pendel im Vakuum. In jedem Moment des Hin und Her könnte man eine Filmaufnahme anhalten und den Film rückwärts ablaufen lassen. Das Pendel schwingt auch bei umgekehrtem Zeitverlauf immer noch richtig.



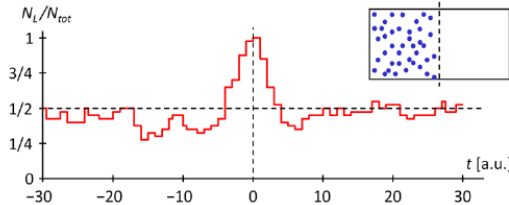
Schwingt das Pendel in einem Gas, wird seine Amplitude (= Ausschlag) abnehmen und das Gas sich erwärmen. Die Anfangsenergie des Pendels ist nach einiger Zeit an das Gas abgegeben. Die Gasmoleküle werden das stehende Pendel durch zufällige Stöße zittern lassen. Es wird aber nie vorkommen, dass die Stöße koordinieren und das Pendel wieder aufschwingen lassen. Der Vorgang der Dämpfung ist irreversibel.



Ein Gefäss enthält  $N_{tot} = 4$  Gasatome. Zu einer bestimmten Zeit  $t = 0$  sind alle Atome (zufällig oder hineingelegt) in der linken Hälfte des Behälters. Die Grafik zeigt den Bruchteil  $N_L/N_{tot}$  der Atome in der linken Gefässhälfte als Funktion der Zeit  $t$ . Es kommt oft vor, dass sich alle Atome in einer Gefässhälfte befinden.



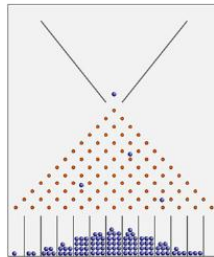
Startet man mit 40 Atomen in der linken Hälfte des Gefässes, ist nach kurzer Zeit die Verteilung auf beide Hälften ausgeglichen. Die zufällige Bewegung der Atome füllt den Behälter gleichmässig aus.



### Sprungwahrscheinlichkeit

**Galtons** Nagelbrett. Die Sprungwahrscheinlichkeit der Kugel auf einem Nagel nach links oder nach rechts ist die gleiche, nämlich 50%. Die Verteilung der Kugeln nach  $N$  Sprüngen ist eine **Binominalverteilung**:

N =	Wahrscheinlichkeit						
0				1			
1			1/2		1/2		
2		1/4		2/4		1/4	
3		1/8	3/8		3/8	1/8	
4	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16		



Die Binominalverteilung wird für grosse  $N$  zur **Gaussverteilung**. Ein Teilchen hat nach vielen Sprüngen die Wahrscheinlichkeit  $w(x) \cdot dx$ , vom Ursprung einen Abstand zwischen  $x$  und  $x+dx$  zu haben. Abstand bedeutet Betrag von  $x$ , auf die Plus- oder die Minus-Seite.

$$w(x) \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle x^2 \rangle}} e^{-\frac{x^2}{2 \langle x^2 \rangle}} \cdot dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

$w$  für Nagelbrett mit  $N$  Sprüngen gleicher Weite  $b$ :

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \cdot b}} e^{-\frac{x^2}{2N \cdot b^2}}$$

### 4.4.2 RMS (Root Mean Square)

Die Grösse  $W(x)$  nennt man **Wahrscheinlichkeitsdichte**. Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit ergibt sich erst durch Multiplikation mit einer Intervalllänge  $dx$ , respektive durch Integration zwischen den Grenzen  $x_1$  und  $x_2$ .

Definition:

**Root Mean Square (rms):**

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

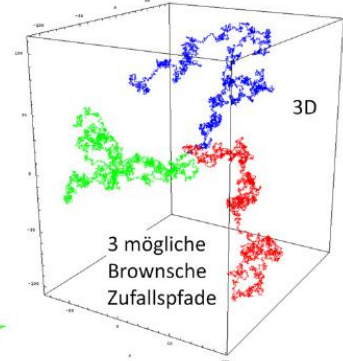
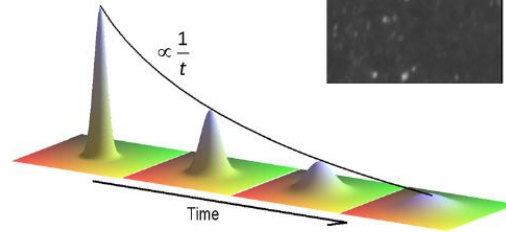
- Zuerst quadrieren (square),
- dann mitteln (mean),
- dann Wurzel ziehen (root) !

### 4.4.3 Brownsche Bewegung

Rauchteilchen in einem Gas, oder Fetteilchen in verdünnter Milch zittern. Stösse der umliegenden Moleküle mitteln sich nicht heraus, es resultieren zufällige "Schubser". Die Statistik dieser Zufallsbewegung birgt **Irreversibilität** in sich. Diese kann man durch Reibung einführen.

Thermische Bewegung von Latex-Kügelchen ( $d \approx 20 \text{ nm}$ ) in Wasser.

2D Diffusion



#### Gleichung von Einstein-Smoluchowski

Wir betrachten die Brownsche Bewegung eines kugelförmigen Teilchens mit Durchmesser  $d$  und Masse  $m$  in einer Flüssigkeit der Viskosität  $\eta$ . Die Stosseschwindigkeit  $v$  des Teilchens sei klein  $\rightarrow$  Stokes Reibung:  $F_{\text{Stokes}} = 6\pi \frac{d}{2} \eta \cdot v$ . Die zufällig schwankende Stosskraft sei  $F_z$ .

Bewegungsgleichung:  $m \cdot \ddot{x} = F_z - 6\pi \frac{d}{2} \eta \cdot \dot{x}$  Einstein löste diese Gleichung mit gewissen Annahmen für  $F_z$  und berechnete den Mittelwert  $\langle x^2 \rangle$

Brownsche Bewegung nach Einstein und Smoluchowski:

$$\langle x^2 \rangle_{1D} = \frac{2k_B T}{3\pi d \eta} t \quad \langle \vec{r}^2 \rangle_{3D} = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\pi d \eta} t$$

$\eta$  = Viskosität  $d$  = Teilchendurchmesser  $T$  = Temperatur in Kelvin

$t$  = Beobachtungszeit in s  $\sim$  Anzahl Sprünge

$$\text{Boltzmann Konstante } k_B = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314}{6.022 \times 10^{23}} = 1.381 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{Molekül} \cdot \text{K}}$$

Sind der Radius des Teilchens, die Viskosität der Flüssigkeit und die Temperatur bekannt, kann durch Pfadbeobachtung die Boltzmann Konstante  $k_B$  experimentell bestimmt werden. Mithilfe der universellen Gaskonstante  $R$  konnte Jean-Baptiste Perrin 1908 die Avogadrozahl  $N_A$  sehr präzise bestimmen (und gleichzeitig die Einstein-Smoluchowski Beziehung bestätigen).

#### Diffusion

Die Brownsche Bewegung erklärt die Tatsache, dass sich Teilchen in einem Medium gleichmässig verteilen. Es resultiert ein Teilchenstrom  $J$  aus einem Gebiet mit hoher Teilchenkonzentration  $\phi_{\text{hoch}}$  zu einem Gebiet mit tiefer Teilchendichte  $\phi_{\text{tief}}$ . Dieser Prozess heisst Diffusion. Der Teilchenstrom wird durch den Konzentrationsgradienten getrieben:

Teilchenstrom in einer Dimension:

$$[J_x] = \frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \quad [\phi] = \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \quad J_x = -D \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$D$  ist die **Diffusionskonstante**. Sie ist eine Materialgrösse und Temperaturabhängig.  
**20.** Bestimmen Sie die Einheit von  $D$ .

Für Teilchen (z.B. Salz) mit einem Durchmesser  $d$  in einer Flüssigkeit (z.B. Wasser) der Temperatur  $T$  und mit der Viskosität  $\eta$  ist nach Einstein-Smoluchowski:

$$D \sim \frac{k_B T}{d \cdot \eta}$$

### 4.5 Kinetische Gastheorie

#### 4.5.1 $k_B T \sim$ Mass für mittlere kinetische Energie eines Moleküls

Mittlere translatorisch-kinetische Energie  $E_{kin}$  im idealen Gas

$n$  Mol des idealen Gas  $\langle E_{kin, Gas} \rangle = \frac{3}{2} nRT$  1 Molekül des idealen Gases  $\langle E_{kin, Molekül} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

Mittlere Kollisionszeit

$$t_{mean} = \frac{dt}{dN} = \frac{V_{Gas}}{4\pi\sqrt{2} \cdot r^2 v N_{tot}}$$

Mittlere freie Weglänge:

$$\Lambda = v \cdot t_{mean} = \frac{V_{Gas}}{4\pi\sqrt{2} \cdot r^2 N_{tot}} = \frac{k_B T}{4\pi\sqrt{2} \cdot r^2 p}$$

$p V_{Gas} = n R T = N_{tot} k_B T$

### 4.5.2 Maxwell - Boltzmann Verteilung

Die Verteilfunktion der molekularen Geschwindigkeiten kann mittels statistischer Mechanik hergeleitet werden.

**Geschwindigkeits-Verteilfunktion:**

$M$  = Molmasse,  $m_{k\ddot{u}l}$  = Molek\u00fclmasse  
 $R$  = Universelle Gaskonstante = 8.314 [SI]  
 $k_B$  = Boltzmann Konstante =  $1.381 \times 10^{-23}$  [SI]  
 $T$  = absolute Temperatur in Kelvin

**Energie-Verteilfunktion ( $E = \frac{1}{2} m_{k\ddot{u}l} \cdot v^2$ ):**

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\left( \frac{M \cdot v^2}{2RT} \right)}$$

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_{k\ddot{u}l}}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\left( \frac{m_{k\ddot{u}l} \cdot v^2}{2k_B T} \right)}$$

$$\varphi(E) = \frac{8\pi}{m_{k\ddot{u}l}} \left( \frac{m_{k\ddot{u}l}}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} E \cdot e^{-\left( \frac{E}{k_B T} \right)}$$

Substitution  $v \leftrightarrow E$

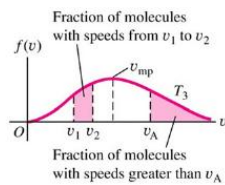
$$E = \frac{1}{2} m_{k\ddot{u}l} \cdot v^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m_{k\ddot{u}l}}}$$

$$\frac{dE}{dv} = m_{k\ddot{u}l} \cdot v$$

$$\rightarrow dv = \frac{dE}{m_{k\ddot{u}l} \cdot v} = \frac{dE}{\sqrt{2E \cdot m_{k\ddot{u}l}}}$$

**Wahrscheinlichkeiten:**



$$W(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) \cdot dv$$

$$W(E_1, E_2) = \int_{E_1}^{E_2} \varphi(E) \cdot \frac{dE}{\sqrt{2E \cdot m_{k\ddot{u}l}}} =$$

$$\int_{E_1}^{E_2} \frac{8\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \sqrt{E} \cdot e^{-\left( \frac{E}{k_B T} \right)} \cdot dE$$

Da es sich bei  $f(v)$  um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt, muss das Integral  $\int_0^\infty f(v) dv = 1$  sein. Es bedeutet, die Wahrscheinlichkeit ist 100%, dass ein Molek\u00fcl irgend eine Geschwindigkeit zwischen 0 und  $\infty$  hat.

Der Faktor  $4\pi [M/(2\pi RT)]^{3/2}$  in der Boltzmann-Verteilung  $f(v)$  dient somit einzig der Normierung des Integrals auf 1. Die Funktion  $f(v)$  entspricht der **Gewichtung** bei Mittelungen.

### 4.5.3 Charakteristische Geschwindigkeiten

Wahrscheinlichste Geschwindigkeit

$$v_w \rightarrow \left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v_w} = 0$$

$$v_w = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_{k\ddot{u}l}}} = \sqrt{2 \frac{RT}{M}}$$

$$v_w = \text{Max. von } f(v)$$

Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v_{av} = \langle |v| \rangle = \int_0^\infty |v| f(v) dv$$

$$v_{av} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_{k\ddot{u}l}}} = \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M}}$$

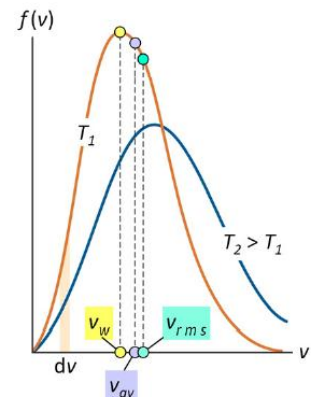
$$v_{av} \hat{=} \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \dots}{N}$$

Root Mean Square Geschwindigkeit

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v) dv}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_{k\ddot{u}l}}} = \sqrt{3 \frac{RT}{M}}$$

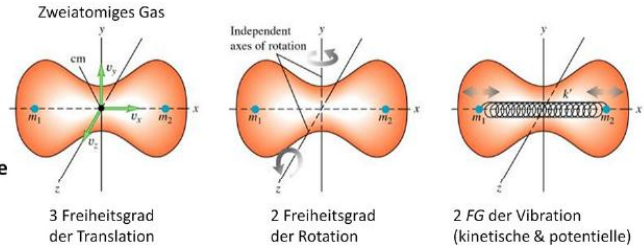
$$v_{rms}^2 \hat{=} \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots}{N}$$



### 4.5.4 Freiheitsgrade und Äquipartition

Das einatomige, ideale Gas hat genau drei Bewegungs-Freiheitsgrade: von links nach rechts, von hinten nach vorn, von unten nach oben.

Zweiatomige Gase haben mehr Bewegungsmöglichkeiten. Experimentell findet man eine **gleichmässige Verteilung** der Energie auf die **aktiven** Freiheitsgrade (FG). Diese Tatsache kann man mithilfe der statistischen Thermodynamik erklären.



**Äquipartitions Gesetz** der klassischen Mechanik: Auf jeden aktiven Freiheitsgrad eines Moleküls in einem Gas der Temperatur  $T$  entfällt im Mittel die Energie  $\frac{1}{2} k_B T$

$$\langle E_{\text{Molekül}} \rangle = \frac{1}{2} k_B T \left[ \frac{J}{FG} \right]$$

$$\langle E_{\text{mol}} \rangle = \frac{1}{2} R \cdot T \left[ \frac{J}{\text{mol} \cdot FG} \right]$$

Nicht aktiv bedeutet, der Freiheitsgrad ist "eingefroren" (Erklärung mit Quantenmechanik).

## 4.6 Wärme und Arbeit

### 4.6.1 Spezifische Wärmekapazität

Um die Temperatur einer Substanz zu erhöhen, kann man ihr **Wärme**  $Q$  zuführen. Wärme ist eine Energieform. Sie hat die Einheit Joule. Manchmal werden noch die alten Wärmeeinheiten Kalorie (1 cal = 4.186 J) und British thermal unit (1 Btu = 1055 J = 252 cal) benutzt.

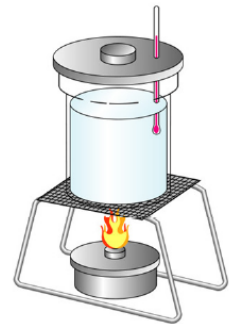
Die Wärmespeicherfähigkeit eines Körpers bezeichnet man als **Wärmekapazität**. Die spezifische Wärmekapazität eines Materials hat das Symbol  $c$ .

Wird einem Körper die Wärmemenge  $Q$  zu- oder abgeführt, erhöht sich seine Temperatur um  $\Delta T$ :  $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$   $dQ = m \cdot c \cdot dT$

Die spezifische Wärmekapazität ist dann:

$$c \text{ pro Masse: } c_{(m)} = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \quad c \text{ pro Mol: } c_{(n)} = \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT}$$

$c$ -Werte für verschiedene Materialien findet man in Tabellen.



### Spezifische Wärme $C_V$ des idealen Gases

Die kinetische Energie in einem Gas berechnet sich mithilfe der Temperatur:  $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} nRT$ . Die Energieänderung eines Gases entspricht einer Temperaturänderung:  $dE_{\text{kin}} = \frac{3}{2} nR dT$ . Durch Vergleich mit der Wärmeänderung bei konstantem Gasvolumen  $dQ = n c_{(n)} dT$  folgt:

Spezifische Wärmekapazität des **idealen Gases** pro Mol, bei konstantem Gasvolumen <sup>#)</sup>

$$c_{(n)V} \equiv C_V = \frac{3}{2} R$$

Der Index (n) für die Angabe "pro Mol" wird in der Folge weggelassen.

Die Tabelle zeigt, dass für einatomige Gase wie He oder Ar der experimentelle  $C_V$ -Wert perfekt mit dem Idealwert  $\frac{3}{2} R = 12.47 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  übereinstimmt. Zweiatomige Gase wie  $H_2$  oder  $O_2$  haben einen  $C_V$ -Wert von ziemlich genau  $\frac{5}{2} R = 20.79 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ . Das zweiatomige Molekül hat zusätzliche **Freiheitsgrade** der Rotation, in die es Energie stecken kann. Mehratomige Gase scheinen noch mehr Freiheitsgrade und Energiespeicherfähigkeit zu besitzen.

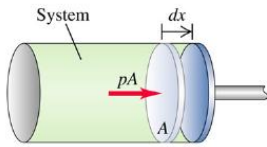
Spezifische Wärmekapazität pro Mol des **zweiatomigen Gases**, mit Rotation, bei konstantem Volumen. <sup>§)</sup>

$$C_V = \frac{5}{2} R$$

Wärmekapazität von realen Gasen		
Gas Typ	Gas	$C_V$ (J/mol·K)
Ein-atomig ( $\frac{3}{2} R = 12.47$ )	He	12.47
	Ar	12.47
Zwei-atomig ( $\frac{5}{2} R = 20.79$ )	$H_2$	20.42
	$N_2$	20.76
	$O_2$	21.10
	CO	20.85
Mehr-atomig	$CO_2$	28.46
	$SO_2$	31.39
	$H_2S$	25.95

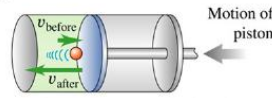


### 4.6.2 Volumenarbeit eines Gases

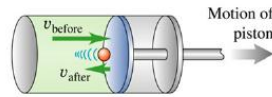
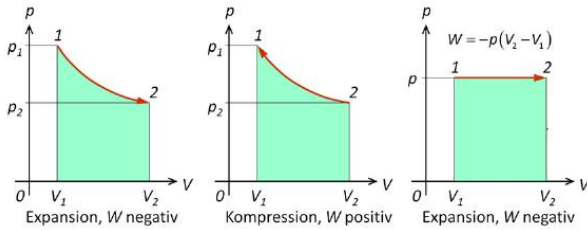


Benzin verbrennt in einem Zylinder. Das Gasgemisch dehnt sich aus und verrichtet Arbeit  $dW$  am Kolben.  
 $dW = F \cdot dx = pA \cdot dx = p \cdot dV$

Volumenarbeit am Gas: #) 
$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$



(b) Piston moves toward molecule during collision: molecule gains kinetic energy, does negative work on piston



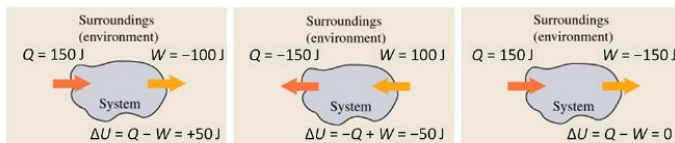
(a) Piston moves away from molecule during collision: molecule loses kinetic energy, does positive work on piston

#) Das Vorzeichen stellt sicher, dass bei Expansion ( $V_2 > V_1$ ) das Gas Arbeit an der Aussenwelt verrichtet. Die Arbeit  $W$  wird bei Expansion negativ,  $W$  geht aus dem Gas heraus, das Gas verliert Energie!

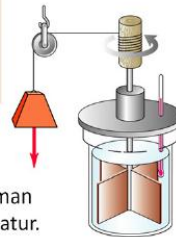
### 4.6.3 Erster Hauptsatz der Thermodynamik, Innere Energie

Die innere Energie  $U$  eines Körpers ist eine Zustandsgrösse der Thermodynamik. Wir können uns die innere Energie als die Summe der kinetischen ("Zittern") und potentiellen ("Federn") Energie aller Moleküle des Körpers vorstellen. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik ist eine simple Energiebilanz für den Körper.

Erster Hauptsatz der Thermodynamik 
$$\Delta U_{(U_2-U_1)} = Q_{in} + W_{in} \quad dU = dQ + dW = dQ - pdV$$
  
 Infinitesimaler Ansatz mit Volumenarbeit #)



(a) More heat added to system than system does work: internal energy of system increases  
 (b) More heat flows out of system than work is done: internal energy of system decreases  
 (c) Heat added to system equals work done by system: internal energy of system unchanged



Führt man einem Körper Arbeit zu, beispielsweise Reibungsarbeit, erhöht man seine innere Energie. Das bedeutet meist eine Erhöhung der Körpertemperatur.

#) Das Minus-Zeichen bedeutet, dass bei einer Kompression die Arbeit in das Gas hineinsteckt wird, bei einer Expansion geht sie dem Gas verloren. Das Minuszeichen ist eine Folge des Wechselwirkungsprinzips von Newton. Die Kraft  $p \cdot A$  vom Gas nach aussen ist gleich minus der Kraft vom Kolben auf das Gas. Bei einer Kompression ist die Kolbenkraft parallel zur Kolbenbewegung.

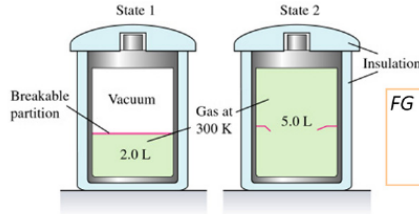
Experimente zeigen, dass die Temperatur eines dünnen (= ideales) Gas bei **freier** (= keine Arbeit) Expansion nicht ändert. Daraus folgt, dass die innere Energie des idealen Gases nur von der Temperatur abhängt, nicht vom Druck, nicht vom Volumen:

$$dU = dQ + dW = 0 \rightarrow U = \text{konstant} = f(T) \neq f(p, V)$$

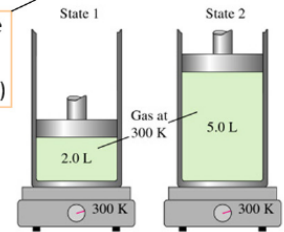
0, Isolation!      0, keine Kolbenbewegung! #)

Ideales Gas:  $U = U(T) \neq U(p, V)$

$$\Rightarrow U_{id.Gas}(T) = \frac{FG}{2} nRT = n \cdot C_V T$$



FG = Freiheitsgrade  
= 3 (einat. Gas)  
= 5 (zweiat. Gas)



Im Gegensatz zum Experiment oben stellt das Experiment rechts eine echte Volumenexpansion dar. Damit verbunden ist eine Arbeit, die vom Gas am Kolben verrichtet wird.

### Spezifische Wärme Cp des idealen Gases

Ein ideales Gas werde auf zwei Arten von der Temperatur  $T_1$  auf die höhere Temperatur  $T_2$  gebracht: Erstens eine isochore Expansion ( $V = \text{konstant}$ ), zweitens eine isobare Expansion ( $p = \text{konstant}$ ). Die Änderung der inneren Energie  $\Delta U = U(T_2) - U(T_1)$  ist gleich auf beiden Wegen:

$$nC_V(T_2 - T_1) = Q_V = \Delta U - W_{in} = \Delta U - 0$$

$$nC_p(T_2 - T_1) = Q_p = \Delta U - W_{in} = \Delta U + p(V_2 - V_1) = \Delta U + nR(T_2 - T_1)$$

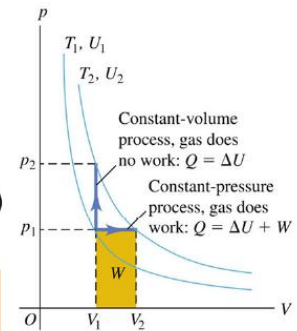
$$\rightarrow nC_V(T_2 - T_1) = \Delta U = nC_p(T_2 - T_1) - nR(T_2 - T_1)$$

$$C_p = C_V + R \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} \quad U_{id.Gas}(T) = nC_V T$$

Molare Wärmekapazitäten des idealen Gases

Verhältnis der molaren Wärmekapazitäten des idealen Gases

Innere Energie des idealen Gases



45. Zeigen Sie für das ideale Gas:

$$\gamma = \begin{cases} 1.67 & \text{ein-atomig} \\ 1.40 & \text{zwei-atomig} \end{cases}$$

Viele Gase verhalten sich bei Normalbedingungen wie eine ideales Gas:

Table 19.1 Molar Heat Capacities of Gases at Low Pressure

Type of Gas	Gas	$C_V$ (J/mol · K)	$C_p$ (J/mol · K)	$C_p - C_V$ (J/mol · K)	$\gamma = C_p/C_V$
Monatomic	He	12.47	20.78	8.31	1.67
	Ar	12.47	20.78	8.31	1.67
Diatomic	H <sub>2</sub>	20.42	28.74	8.32	1.41
	N <sub>2</sub>	20.76	29.07	8.31	1.40
	O <sub>2</sub>	20.85	29.17	8.31	1.40
	CO	20.85	29.16	8.31	1.40
Polyatomic	CO <sub>2</sub>	28.46	36.94	8.48	1.30
	SO <sub>2</sub>	31.39	40.37	8.98	1.29
	H <sub>2</sub> S	25.95	34.60	8.65	1.33

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.

Beachten Sie, dass auch zweiatomige Gase hier als ideal bezeichnet werden. Mit ideal ist gemeint, dass die innere Energie nur eine Funktion der Temperatur ist. Es herrschen also keine van der Waals Kräfte!

### 4.6.4 4 Zustandsänderungen des idealen Gases

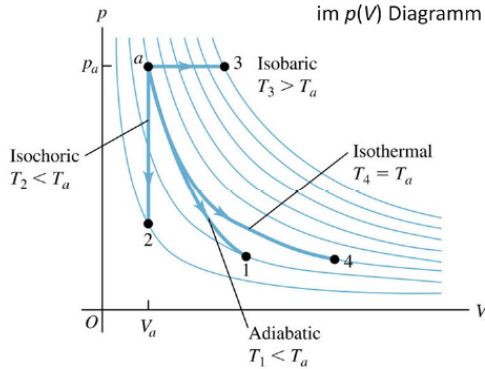
**Isochorer** Prozess:  $\Delta V_{a2} = 0$   
Keine Volumenänderung  
 $W_{a2} = 0 \rightarrow \Delta U_{a2} = Q_{a2} = nC_V(T_2 - T_a)$

**Isobarer** Prozess:  $\Delta p_{a3} = 0$   
Keine Druckänderung  
 $W_{a3} = -p(V_3 - V_a) \quad Q_{a3} = nC_p(T_3 - T_a)$

**Isothermer** Prozess:  $\Delta T_{a4} = 0 = \Delta U_{a4}$   
Keine Temperaturänderung  
 $W_{a4} = -nRT \ln\left(\frac{V_4}{V_a}\right) = -Q_{a4}$

**Adiabatischer** Prozess:  $Q_{a1} = 0$   
Kein Wärmeaustausch  
 $W_{a1} = \Delta U_{a1} = nC_V(T_1 - T_a)$

Vier Standard-Zustandsänderungen des idealen Gas im  $p(V)$  Diagramm



Die adiabatische Zustandsänderung wird manchmal isentrop genannt. Das ist aber eine Einschränkung auf reversible, adiabatische Zustandsänderungen. Die Entropie ändert dann nicht.

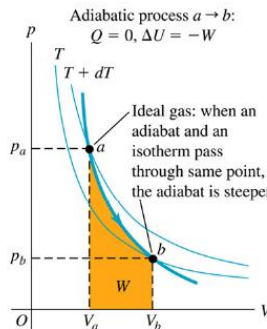
### 4.6.5 Adiabatische Zustandsänderung

Der adiabatische Prozess ist definiert durch  $Q = 0$ . Das System ist thermisch isoliert. Eine Temperaturänderung stammt immer von einer Arbeit, nicht von einem Wärmefluss:  $\Delta U = W$

$$nC_V dT = dU = dW = -pdV = -\frac{nRT}{V} dV$$

$$\rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V} \frac{dV}{V} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

$$\rightarrow \ln(T) = -(\gamma - 1) \ln(V) + \text{Const.} \rightarrow \ln(T \cdot V^{\gamma-1}) = \text{Const.}$$



Adiabatischer Prozess des idealen Gas:  $Q = 0$

$$T_1 \cdot V_1^{(\gamma-1)} = T_2 \cdot V_2^{(\gamma-1)} \quad p_1 \cdot V_1^\gamma = p_2 \cdot V_2^\gamma$$

$$T_1 \cdot p_1^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} = T_2 \cdot p_2^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} \quad W = \Delta U = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1}$$