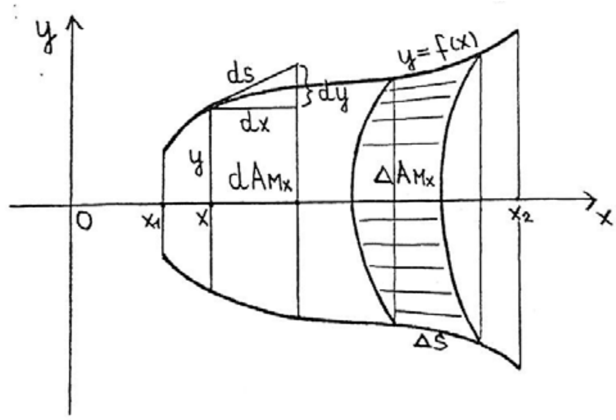
MATH.FS2011

Zusammenfassung der Formeln aus Vorlesung von P. Amport

1 Mantelfläche, Drehkörper, Sektorenformel

1.1 Mantelfläche



ΔA_{Mx}: von Δs erzeugte Mantelfläche einer Scheibe.

dA_{Mx}: Mantelfläche des von ds erzeugten Kegelstumpfes.

$dA_{Mx} \approx \Delta A_{Mx}$.

1.1.1 kartesisch

$$A_{Mx} = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

$$A_{My} = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x\sqrt{1+x'^2}\, dy$$

1.1.2 Parameterform

$$A_{Mx} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt$$

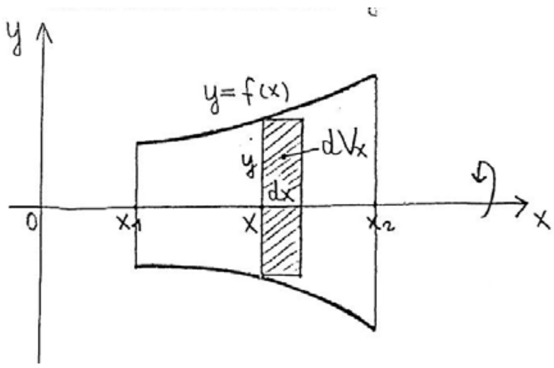
$$A_{My} = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt$$

1.1.3 Polarkoordinaten

$$A_{Mx} = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin\varphi \sqrt{r^2+\dot{r}^2}\, d\varphi$$

$$A_{My} = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \cos\varphi \sqrt{r^2+\dot{r}^2}\, d\varphi$$

1.2 Drehkörper



$$dV_x = \pi y^2\, dx$$

$$V_x = \int_V dV_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx.$$

1.2.1 kartesisch

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 \, dx \quad ; \quad V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$$

1.2.2 Parameterform

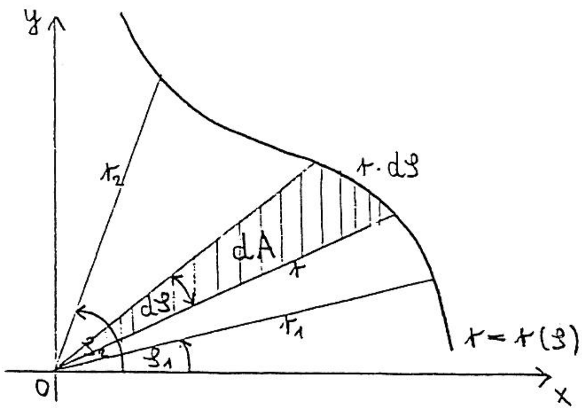
$$V_x = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} [y(t)]^2 \, \dot{x} \, dt \quad ; \quad V_y = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} [x(t)]^2 \, \dot{y} \, dt$$

1.2.3 Polarkoordinaten

$$V_x = \pi \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \sin^2\vartheta \, (\dot{r} \cos\vartheta - r \sin\vartheta) \, d\vartheta$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \cos^2\vartheta \, (\dot{r} \sin\vartheta + r \cos\vartheta) \, d\vartheta$$

1.3 Sektorenformeln

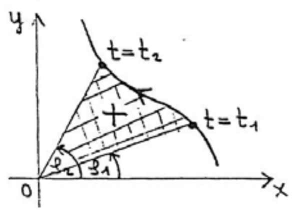


$$A = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 \, d\vartheta$$

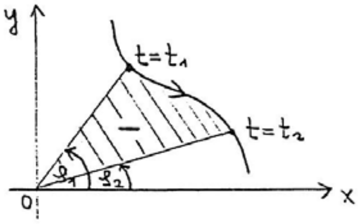
Leibnizsche Sektorenformel:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y) \, dt}$$

Vorzeichen der Flächenmaßzahl



Sektorenfläche links



Sektorenfläche rechts

1.4 Bogenlängenberechnung

1.4.1 kartesisch

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

ODER

$$S = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

1.4.2 Parameterform

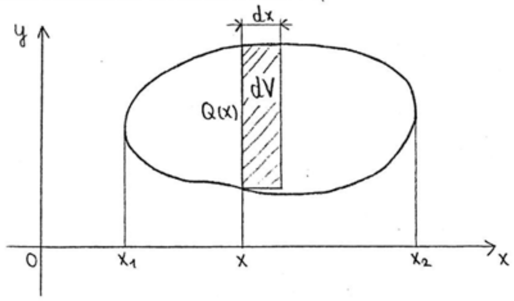
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt$$

1.4.3 Polarkoordinaten

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2+\dot{r}^2}\, d\varphi$$

1.5 Berechnung von Rauminhalten

Das Volumen eines Körpers mit bekannter Querschnittsfläche



Folgerung: (Prinzip von Cavalieri)
Körper mit gleichen Querschnittsfunktionen haben gleiche Volumina.

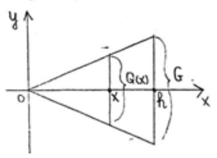
$Q(x)$: Querschnittsfläche an der Stelle x

dV : Volumenelement der Dicke dx : $dV = Q(x)\cdot dx$

Durch Integration über alle Volumenelemente erhält man für das Volumen V des Körpers:

$$V = \int_V dV = \int_{x_1}^{x_2} Q(x)\, dx$$

Beispiel: Volumen der Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h.



$Q(x) : G = x^2 : h^2 \Rightarrow Q(x) = \frac{G\cdot x^2}{h^2}$

$$V = \int_0^h Q(x)\, dx = \int_0^h \frac{G}{h^2}\, x^2\, dx$$

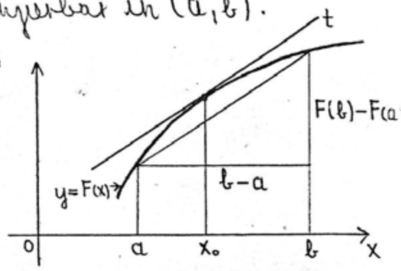
$$= \frac{G}{h^2}\cdot\int_0^h x^2\, dx = \frac{G}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\, G\, h}}\,.$$

2 Mittelwertsätze

2.1 Differentialrechnung

Sei $F(x)$ stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b).
Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$, so dass

$$\boxed{\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(x_0)} \qquad (M_1)$$



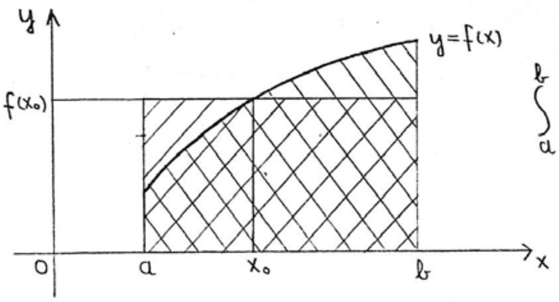
Sei nun $F(x)$ eine Stammfunktion zu einer in $[a,b]$ stetigen Funktion $f(x)$. $F(x)$ erfüllt dann die obigen Voraussetzungen.
Ferner gilt: $F'(x) = f(x)$ und $F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.
In (M_1) eingesetzt ergibt dies $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)$.

2.2 Integralrechnung

Ist $f(x)$ in $[a,b]$ stetig, so gibt es eine Zahl $x_0 \in [a,b]$, so dass gilt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(x_0)} \qquad (M_2)$$

<u>$f(x_0)$ heisst Mittelwert</u> der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$.
(linearer Mittelwert oder arithmetischer Mittelwert).



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{\text{Rechteck}}$$

3 Regeln für das bestimmte Integral

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$, in beliebiger Reihenfolge geordnet, gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

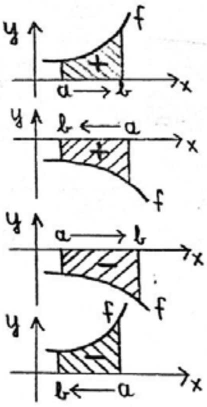
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

3.1 Vorzeichenregeln

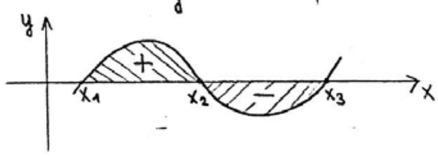
Vorzeichen Regeln

$\oplus$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0 \quad \begin{cases} a < b & \text{und } f(x) > 0 \\ b < a & \text{und } f(x) < 0 \end{cases}$

$\ominus$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < 0 \quad \begin{cases} a < b & \text{und } f(x) < 0 \\ b < a & \text{und } f(x) > 0 \end{cases}$



Merkregel: Liegt die Fläche links von der Richtung $a \to b$, so ist ihr Inhalt positiv; liegt sie rechts von der Richtung $a \to b$, so ist ihr Inhalt negativ.

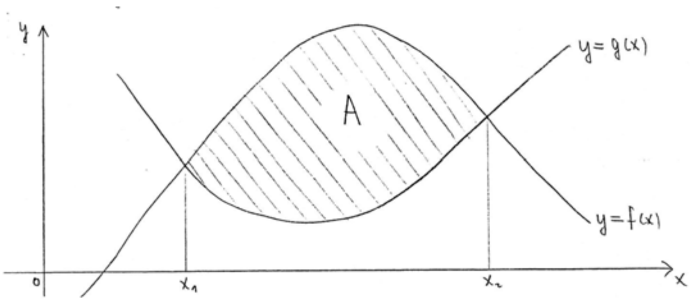


Liegt die Fläche teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse, so gilt für den Inhalt der Gesamtfläche:

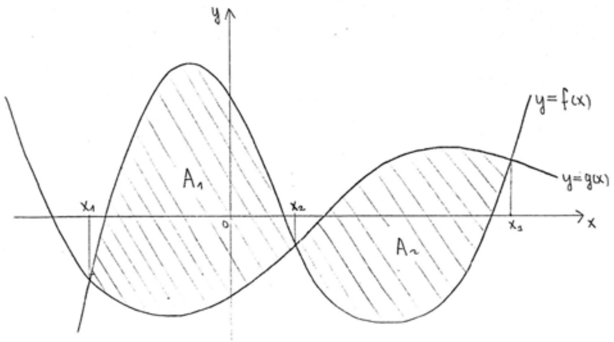
$$A = |I_1| + |I_2| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\right| .$$

4 Flächenberechnung (Formeln und Graphen)

4.1 Fläche zwischen zwei Kurven

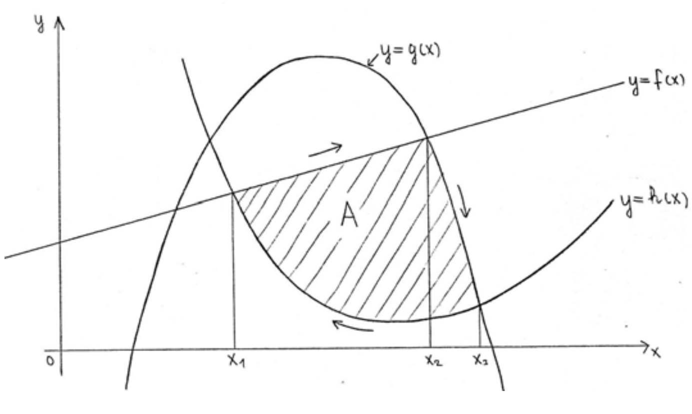


$$A = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - g(x)]\, dx$$



$$A = A_1 + A_2 = \left| \int_{x_1}^{x_2} u(x)\, dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} u(x)\, dx \right|$$

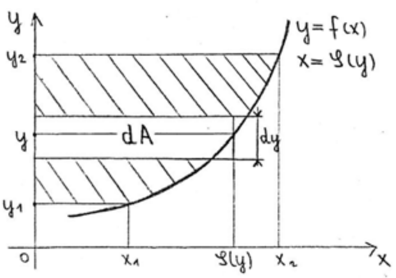
4.2 Fläche zwischen mehreren Kurven



Integriere im Uhrzeigersinn:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \int_{x_2}^{x_3} g(x)\, dx + \int_{x_3}^{x_1} h(x)\, dx$$

4.3 Fläche zwischen einer Kurve und der y-Achse



Funktion: $y = f(x)$

Umkehrfunktion: $x = g(y)$

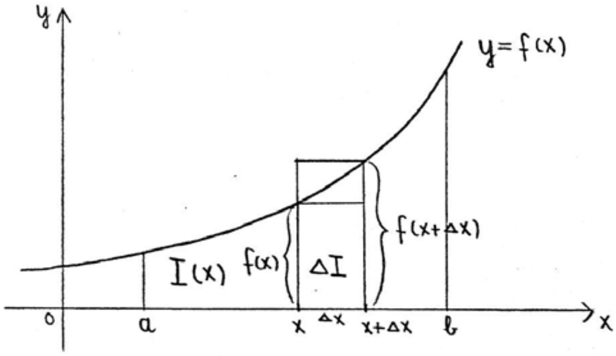
$y_1 = f(x_1)\ ,\ y_2 = f(x_2)$

$dA = g(y) \cdot dy$

$$A = \int_A dA = \int_{y_1}^{y_2} g(y)\, dy$$

5 Hauptsatz Differential- und Integralrechnung

Unter einer Integralfunktion der Funktion $f(x)$ versteht man eine „Flächenfunktion" $I(x) := \int_a^x f(t)\,dt$.



Sei $f(x) \geq 0$ und stetig im Intervall $[a;b]$; dann gilt:

$$\boxed{I'(x) = f(x)} \qquad \text{für } x \in [a;b]$$

Beweis des Hauptsatzes:

Sei $I(x+\Delta x) - I(x) = \Delta I$. Damit gilt :

$$f(x) \cdot \Delta x \leq \Delta I \leq f(x+\Delta x) \cdot \Delta x \quad \Rightarrow$$

$$f(x) \leq \frac{\Delta I}{\Delta x} \leq f(x+\Delta x)$$

Weil f stetig ist in $[a;b]$ gilt: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$.

Somit: $I'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{I(x+\Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta I}{\Delta x} = f(x)$.

Folgerung: Die Integralfunktion $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

6 Kreisfunktionen

6.1 Kreisfunktionen

Kreisfunktion	Def. Bereich	Wertebereich
$y = \sin x$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[-1; 1]$
$y = \cos x$	$[0; \pi]$	$[-1; 1]$
$y = \tan x$	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$	$\mathbb{R}$
$y = \cot x$	$(0; \pi)$	$\mathbb{R}$

6.2 Arcusfunktionen

Arcusfunktion	Def. Bereich	Wertebereich
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$
$y = \text{arc}\cot x$	$\mathbb{R}$	$(0; \pi)$

6.3 Beziehungen

$\sin(\arcsin x) = x \qquad \tan(\arctan x) = x$

$\cos(\arccos x) = x \qquad \cot(\text{arc}\cot x) = x$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$\arctan(-x) = -\arctan x \qquad \text{arc}\cot(-x) = \pi - \text{arc}\cot x$

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \arctan x + \text{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$

$\arctan x = \text{arc}\cot \frac{1}{x} \qquad x \in (0; \infty)$

$\text{arc}\cot x = \arctan \frac{1}{x} \qquad x \in (0; \infty)$

$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} \qquad x \in [0; 1]$

$\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2} \qquad x \in [0; 1]$

7 Hyperbelfunktionen

7.1 Hyperbelfunktionen

$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x := \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

In Worten: Sinus hyperbolicus (Hyperbelsinus) u.s.w.

Gleichung	Def. Bereich	Wertebereich
$y = \sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \cosh x$	$\mathbb{R}$	$[1; \infty)$
$y = \tanh x$	$\mathbb{R}$	$(-1; 1)$
$y = \coth x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

7.1.1 Beziehungen

$\sinh(-x) = -\sinh x$ $\qquad$ $\tanh(-x) = -\tanh x$

$\cosh(-x) = \cosh x$ $\qquad$ $\coth(-x) = -\coth x$

$\cosh x + \sinh x = e^{x}$ $\qquad$ $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$

7.1.2 Additionstheoreme

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cdot \cosh x$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

7.2 Areafunktionen (Umkehrfunktion von Hyperbelfunktionen)

Gleichung	Def. Bereich	Wertebereich
$y = \operatorname{arsinh} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{arcosh} x$	$[1;\infty)$	$[0;\infty)$
$y = \operatorname{artanh} x$	$(-1;1)$	$\mathbb{R}$
$y = \operatorname{arcoth} x$	$(-\infty;-1) \cup (1;\infty)$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

7.2.1 Beziehungen

$\sinh(\operatorname{arsinh} x) = x$ $\qquad$ $\tanh(\operatorname{artanh} x) = x$

$\cosh(\operatorname{arcosh} x) = x$ $\qquad$ $\coth(\operatorname{arcoth} x) = x$

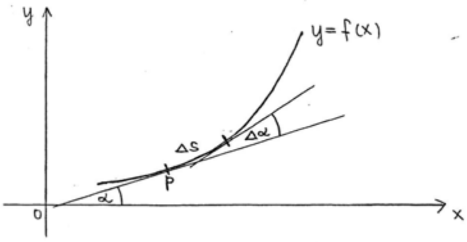
$\operatorname{arsinh}(-x) = -\operatorname{arsinh} x$ $\qquad$ $\operatorname{artanh}(-x) = -\operatorname{artanh} x$

$\operatorname{arcoth}(-x) = -\operatorname{arcoth} x$

$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $\qquad$ $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ $\qquad$ $\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$

8 Krümmung



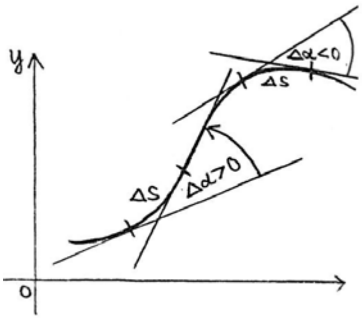
Mittlere Krümmung $:= \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$

Krümmung der Kurve im Punkt P $:= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$

8.1 Krümmung einer Kurve in einem Punkt

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

8.1.1 Vorzeichen der Krümmung



Linkskrümmung (konvex) : $k > 0$

Rechtskrümmung (konkav) : $k < 0$

8.1.2 Parameterdarstellung

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

8.2 Kreiskrümmung

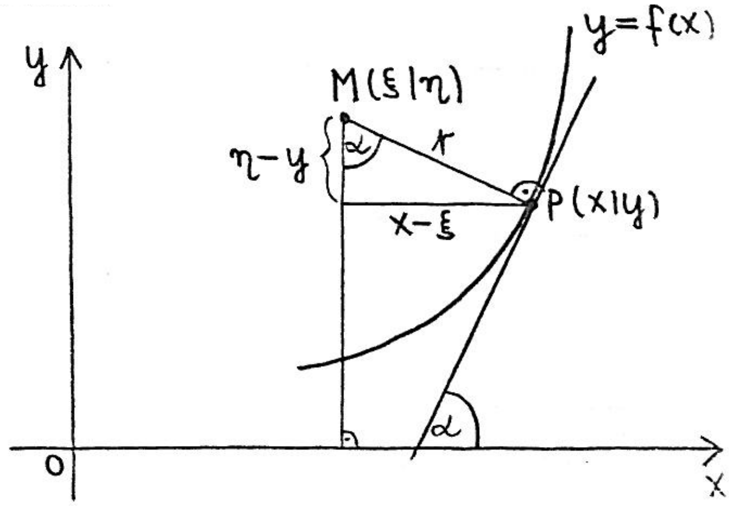
8.2.1 Krümmungsradius

$$r = \frac{1}{|k|}$$

8.3 Evolute und Evolvente

Evolute := Menge aller Krümmungsmittelpunkte einer Kurve.

Evolvente := ursprüngliche Kurve.



8.4 Darstellung der Evolute

Kartesisch:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{aligned}}$$

Parameter x.

Parameterform:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= x(t) - \dot{y}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} \\ \eta &= y(t) + \dot{x}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}} \end{aligned}}$$

Parameter t.

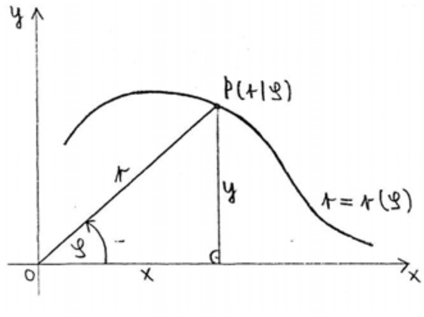
9 Parameter und Polarform

9.1 Parameterdarstellung

$y = f(x)$: Darstellung in kartesischen Koordinaten.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\}$$ Parameterdarstellung von f.

9.2 Polarkoordinaten



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\varphi \\ y &= r \sin\varphi \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}}$$

9.3 Differentiation in Parameter und Polarform

9.3.1 Differentiation bei Parameterdarstellung

Gegeben sei eine Funktion durch die Gleichungen $x = x(t)$; $y = y(t)$. Wir bestimmen die Steigung der Kurventangente für einen Parameterwert t:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

Daraus folgt: $dx = \dot{x}\,dt$ und $dy = \dot{y}\,dt$, also

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$$

Für die zweite Ableitung y'' erhält man nach der Kettenregel:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

<u>Also:</u>

$$\boxed{y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\dot{x}^3}}$$

9.3.2 Differentiation bei Darstellung in Polarkoordinaten

Gegeben sei eine Funktion in Polarkoordinaten: $r = r(\varphi)$.

Parameterdarstellung: $\begin{cases} x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi \\ y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi \end{cases}$ Parameter φ.

Der Differentialquotient lautet dann

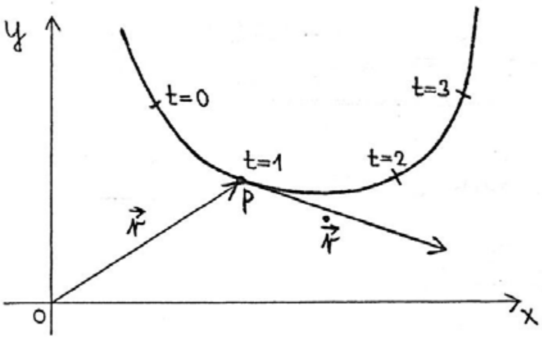
$$\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi}{\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi} = \frac{\dot{r}\cdot\tan\varphi + r}{\dot{r} - r\cdot\tan\varphi}}$$

9.4 Der Tangentenvektor einer Kurve

Gegeben sei eine Funktion in Parameterform durch die Gleichungen $x = x(t)$, $y = y(t)$. Die Steigung der Tangente im Punkt $P(x(t)|y(t))$ beträgt dann $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$. Somit gilt für den

<u>Tangentenvektor im Punkt $P(x(t)|y(t))$:</u>

$$\boxed{\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}$$



Der Tangentenvektor weist in Richtung wachsender t-Werte.

Physik: $\dot{\vec{r}}$ ist der <u>Geschwindigkeitsvektor</u> zur Zeit t: $\dot{\vec{r}} = \vec{v}(t)$.

10 Mac Laurin

10.1 sin(x)

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \mp \cdots}$$

Konvergenzbereich:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+2)!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(n+2)!}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} = \infty \Rightarrow \underline{\text{Beständige Konvergenz.}}$$

Weiter folgt: $\sin(-x) = -\sin x$: $\underline{\text{ungerade Funktion.}}$
(nur ungerade Exponenten!)

10.2 cos(x)

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots}$$

beständig konvergent

Nur gerade Exponenten $\Rightarrow \cos(-x) = \cos x$: $\underline{\text{gerade Funktion.}}$

10.3 e^(x)

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.}$$

Konvergenz: $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

für $-\infty < x < \infty \Rightarrow$ $\underline{\text{Beständige Konvergenz.}}$

10.4 cosh(x) und sinh(x)

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}}$$

beständig konvergent.