Mathematik

Algebra - Zusammenfassung

Flavio De Roni
Uferweg 27
6014 Littau

http://www.mrf2thed.ch

27.12.2009

Inhaltsverzeichnis

1 Arithmetik

1.1 Die reellen Zahlen

N Natürliche Zahlen
N_0 Natürliche Zahlen inkl. 0
Z ganze Zahlen
Q rationale Zahlen
R reelle Zahlen

|x| = x falls x >= 0
-x falls x < 0

1.2 Addition und Subtraktion von reellen Zahlen

Kommutativgesetz: a + b = b + a

Assoziativgesetz: a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b

Bei einer Addition oder Subtraktion mit Näherungswerten gibt man im Resultat so viel Dezimalstellen an, wie diejenige mit der kleineren Anzahl Dezimalstellen hat-
32.4 + 5.825 = 38.2

Wenn eine exakte und eine approximative Zahl addiert oder subtrahiert werden, ergibt dies eine approximative Zahl, die in der gleichen Genauigkeit wie die vorhandene approximative Zahl angegeben wird.

Brüche müssen vor der Addition/Subtraktion gleichnennrig gemacht werden.

1.3 Multiplikation und Division von reellen Zahlen

Kommutativgesetz: a * b = b * a

Assoziativgesetz: a * (b * c) = (a * b) * c = (a * c) * b

reziproker Wert (Kehrwert)

Kehrwert von x ist 1/x. x * 1/x = 1

Bei einer Multiplikation/Division von Näherungswerten wird das Resultat auf so viel signifikante Stellen gerundet, wie diejenige mit der kleineren Anzahl signifikanten Stellen hat.

12.1 * 15.6 = 189
$\underline{123}.56 * \underline{15.6} = \underline{193}0$

1.4 Potenzieren und Radizieren von reellen Zahlen

$a^n = c$ a: Basis n: Exponent c: Potenz	$\sqrt[n]{a} = b$ a: Radikand (a != <0, ausser a <0 und n = ungerade) n: Wurzelexponent

1.5 Kombination von Operationen mit reellen Zahlen

- Klammern vor
- Potenz/ Wurzel vor
- Punkt (Multiplikation/Division) vor
- Strich (Addition/Subtraktion)-Regel

Bei kombinierten Operationen rundet man das Resultat auf gleichviel signifikante Stellen wie die Zahl mit den wenigsten signifikanten Stellen.

+ und - → achte auf Dezimale

- und / → achte auf signifikante Stellen

2 Algebra

2.1 Allgemeines über Algebra

Verallgemeinerung der Arithmetik (Variablen anstelle von reellen Zahlen)

2.2 Addition / Subtraktion

Subtraktion ist definiert als Addition der Gegenzahl.
$a – b = a + (-b) = c$

Neutrales Element = 0

2.3 Multiplikation

Multiplikation mit null = 0
Neutrales Element = 1

2.4 Division

- Division durch null ist nicht definiert. 0/a = 0
- Ungleichnamige Brüche müssen vor dem Addieren (Subtrahieren) zuerst gleichnamig gemacht werden
- Brüche werden dividiert, indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert wird.

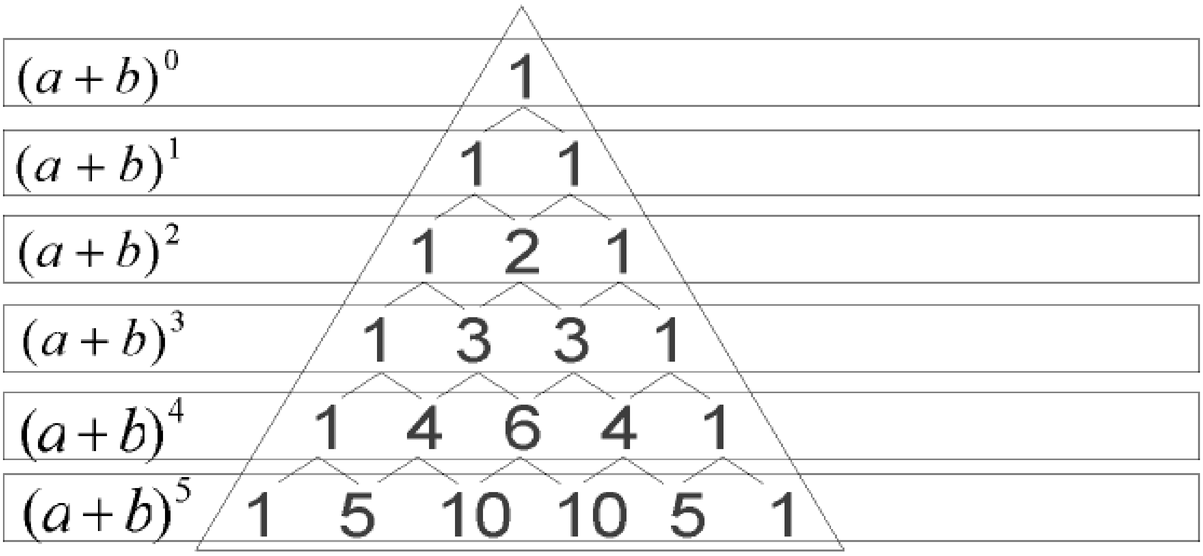
2.5 Potenzieren

$a^n = a * a * a ..... * a$ n-Faktoren

$a^0 = 1$
$0^n = 0$
0^0 = nicht definiert

Genaue Regeln im Skript (grüner Ordner)

Das Pascalsche Dreieck:



2.6 Radizieren

|a| = a für a >= 0
-a für a < 0

Rechengesetze für Beträge

[siehe Skript]

Radizieren von reellen Zahlen

Genaue Regeln im Skript (grüner Ordner)

3 Funktionen, Gleichungen, Ungleichungen

3.1 Gleichungen

- werden zwei Terme gleichgesetzt, so entsteht eine Gleichung T1 = T2
- Eine Behauptung (oder Bedingung), die mindestens eine Variable enthält, deren Wahrheitswert also von der wählbaren Belegung der Variablen abhängt, heisst Aussageform.
- Eine Behauptung, die entweder wahr oder falsch ist, heisst Aussage.
- Die Grundmenge G einer Gleichung T1 = T2 ist die Menge aller Zahlen, welche die Unbekannte zugelassen sind.
- Die Definitionsmenge D einer Gleichung T1 = T2 ist die Menge aller Zahlen aus der Grundmenge G, für die T1 = T2 definiert sind.
- Die Lösungsmenge L einer Gleichung ist die Menge aller Zahlen aus der Definitionsmenge D, welche die Gleichung erfüllen.
- Äquivalenzumformungen: Multiplikation/Division mit null ist nicht erlaubt.

3.2 Lineare Gleichungen

$a * x + b = 0$

3.3 Funktionen

Eine reelle Funktion f ist eine Zuordnung, bei der jeder reellen Zahl x ist Element D genau eine reelle Zahl y ist Element von W ist.

<u>Darstellungsformen:</u>
- $y = f(x)$
- Tabelle
- Pfeildiagramm
- Graphen

3.4 Lineare Funktionen

$y = m * x + b$

b = y-Achsenabschnitt
m = Steigung = $\Delta y / \Delta x = (y2-y1)/(x2-x1)$

Nullstelle der Funktion = Schnittpunkt mit x-Achse (x1/0)

3.5 Ungleichungen

$<$
$\leq$
$>$
$\geq$
$\neq$

Intervalle

Beschränkte (endliche) Intervalle:

- $\{x \mid a \leq x \leq b\} = [a;b]$ abgeschlossenes Intervall
- $\{x \mid a < x < b\} = (a;b;)$ offenes Intervall
- $\{x \mid a \leq x < b\} = [a;b)$ halboffenes Intervall
- $\{x \mid a\ x \leq b\} = (a;b]$ halboffenes Intervall

Unendliche Intervalle:

- mindestens eine Intervallgrenze ist unendlich
- $\{x \mid x \leq b\} = (-\infty;b]$
- $\{x \mid x < b\} = (-\infty;b\ )$
- $\{x \mid x \geq a\} = [a;\ \infty)$
- $\{x \mid x > a\} = (a;\ \infty)$
- $\{x \mid x \in\ R\} = (\infty;\infty)$;

3.6 Lineare Ungleichungen

$|x| =$ x für $x \geq 0$
$-x$ für $x < 0$

$|x| = a$

$x = -a$
$x = a$

3.7 Lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme

$ax + by = c$ (2 Unbekannte)

$ax + by + cz = d$ (3 Unbekannte)

analytische Lösungsverfahren:

- Additionsmethode
- Gleichsetzungsmethode
- Einsetzmethode

3.8 Transformation von Funktionen

Transformationsregeln

1) $y = f(x) \rightarrow y = f(x) + d$
Verschiebung des Graphen in y-Richtung um d-Einheiten

2) $y = f(x) \rightarrow y = c * f(x)$
$c > 1$ Streckung um Faktor c
$0 < c < 1$ Streckung um Faktor 1/c = Stauchung um c

Fixpunkte = Nullstellen der Funktion

3) $y = f(x) \rightarrow x = f(a*x)$
Streckung des Graphen in x-Richtung
$a > 1$ Streckung in x-Richtung um 1/a = Stauchung um a
$0 < a < 1$ Streckung um a = Stauchung um 1/a

Fixpunkt = y-Achsenabschnitt

4) $y = f(x) \rightarrow y = f(x+b)$
Verschiebung des Graphen in x-Richtung
$b>0$ nach links (Wert wird früher erreicht)
$b<0$ nach rechts

5) $y = f(x) \rightarrow y = |f(x)|$
Spiegelung des Graphen für alle negativen Funktionswerte.

6) $y = f(x) \rightarrow y = f(|x|)$
Alle negativen x-Werte werden durch Spiegelung an Geraden durch ihre positiven x-Werte ersetzt.

7) $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$
Spiegelung an x-Achse

8) $y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$
Spiegelung an y-Achse

9) $y = f(x) \rightarrow y = -f(-x)$
Punktspiegelung am Ursprung (0/0)

3.9 Umkehrfunktion

umkehrbar ➔ wenn aus $x1 \neq x2$ stets $f(x1) \neq f(x2)$ folgt

$D_f = W_{f-1}$ $W_f = D_{f-1}$

ist für eine Funktion f: $x \rightarrow y = f(x)$ die umgekehrte Zuordnung $y \rightarrow x$ auch wieder eindeutig, so nennt man f eine **eineindeutige** Funktion.

$y = 1/x$ ➔ $x \leftrightarrow y$ ➔ $x = 1/y$ ➔ nach y auflösen und man hat Umkehrfunktion